

平均を含むモデル

前川真一

東京工業大学大学院 社会理工学研究科 人間行動システム専攻

100314

$N \times 1$ のベクトル \mathbf{y} に関するモデル

$$\mathbf{y} = m\mathbf{1} + \mathbf{f}(\beta) + \mathbf{e} \quad (1)$$

のパラメタ (m, β) を最小2乗で求めることを考える。すなわち

$$\text{RSS} = (\mathbf{y} - (m\mathbf{1} + \mathbf{f}(\beta)))'(\mathbf{y} - (m\mathbf{1} + \mathbf{f}(\beta))) \quad (2)$$

を最小とするパラメタを求める。

Theorem 0.1 (残差平方和の分解)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{Cb})'(\mathbf{a} - \mathbf{Cb}) &= \mathbf{a}'(\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}')\mathbf{a} \\ &\quad + (\mathbf{b} - (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{a})'(\mathbf{C}'\mathbf{C})(\mathbf{b} - (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3)$$

この定理を

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}, \quad \mathbf{b} \rightarrow m, \quad \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta) \quad (4)$$

として使う。

$$\begin{aligned} \text{RSS} &= \mathbf{a}'(\mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathbf{a} + \\ &\quad N(\mathbf{b} - \frac{1}{N}\mathbf{1}'\mathbf{a})'(\mathbf{b} - \frac{1}{N}\mathbf{1}'\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta))'(\mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}')(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)) + \\ &\quad N(m - \frac{1}{N}\mathbf{1}'(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)))'(m - \frac{1}{N}\mathbf{1}'(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta))) \end{aligned} \quad (6)$$

この第2項は、どのような β が与えられても

$$m = \frac{1}{N}\mathbf{1}'(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)) \quad (7)$$

を用いれば、その値を 0 とすることが出来る。したがって、第1項を最小とする β を求めればよいが、そのような β は

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}' \quad (8)$$

が中心化行列（冪等、対称）であるため

$$\text{RSS}_1 = (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta))'(\mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}')(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)) \quad (9)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta))'\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\beta)) \quad (10)$$

$$= (\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{f}(\beta))'(\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{f}(\beta)) \quad (11)$$

を最小とするもの、すなわち、中心化された \mathbf{y} に中心化されたモデルを最小2乗法を使って当てはめた時の解となる。

特にモデルが線形

$$f(\beta) = \mathbf{X}\beta \quad (12)$$

の場合は

$$\text{RSS}_1 = (\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{J}\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{X}\beta) \quad (13)$$

となり、その解は

$$\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{J}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{J}\mathbf{y} \quad (14)$$

となる。