

# 回転について

前川眞一

20200521,20210920, 20220426,0506cot, 10,16 2022. 5. 17

## 1 座標軸の回転

### 1.1 幾何学的導出

図 1 に示すように座標軸  $XY$  を反時計回りの方向に  $\theta$  回転した新しい座標軸  $X'Y'$  を考える。座標軸  $XY$  を用いた点  $u$  の座標を  $(x, y)$  また座標軸  $X'Y'$  を用いた座標を  $(x', y')$  とする。

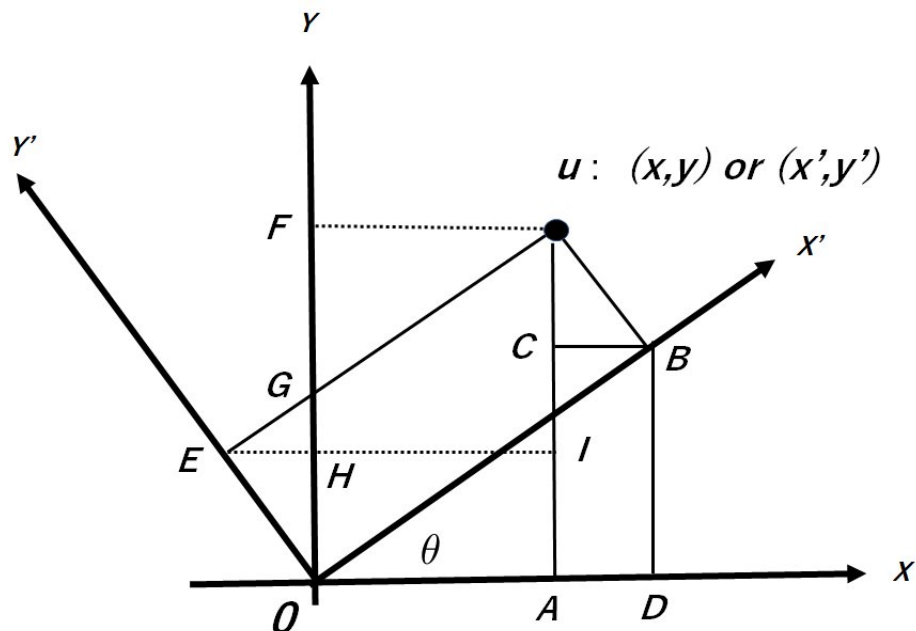


図 1 軸の回転 1

いま、図 1 のアルファベットで示された各点を以下のように定義する。

- $A$ : 点  $u$  から現在の  $x$  軸に下ろした垂線の足  $|\overline{OA}| = x$
- $B$ : 点  $u$  から新しい  $x$  軸に下ろした垂線の足  $|\overline{OB}| = x'$
- $C$ :  $B$  から  $\overline{uA}$  に下ろした垂線の足
- $D$ :  $B$  から現在の  $x$  軸に下ろした垂線の足
- $E$ : 点  $u$  から新しい  $y$  軸に下ろした垂線の足  $|\overline{uE}| = y'$
- $F$ : 点  $u$  から現在の  $y$  軸に下ろした垂線の足  $|\overline{OF}| = y$
- $G$ :  $\overline{uE}$  と現在の  $y$  軸との交点
- $H$ :  $E$  から現在の  $y$  軸に下ろした垂線の足
- $I$ :  $E$  から  $\overline{uA}$  に下ろした垂線の足

したがって、以下の角度は全て  $\theta$  に等しい。

$$\angle BOA = \angle CBO = \angle CUB = \angle EOG = \angle UEI = \theta \quad (1)$$

この図より、以下のようにして、 $x$  と  $y$  をそれぞれ  $x'$  と  $y'$  の関数で表すことができる。

$$x = |\overline{OD}| - |\overline{AD}| \quad (2)$$

$$|\overline{OD}| = |\overline{OB}|\cos(\theta) = x'\cos(\theta) \quad (3)$$

$$|\overline{AD}| = |\overline{CB}| = |\overline{UB}|\sin(\theta) = y'\sin(\theta) \quad (4)$$

したがって、

$$x = x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \quad (5)$$

である。同様に

$$y = |\overline{HF}| + |\overline{OH}| \quad (6)$$

$$|\overline{HF}| = |\overline{IU}| = |\overline{EU}|\sin(\theta) = x'\sin(\theta) \quad (7)$$

$$|\overline{OH}| = |\overline{OE}|\cos(\theta) = y'\cos(\theta) \quad (8)$$

であるから

$$y = x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \quad (9)$$

を得る。

したがって、(5) 式と (9) 式を  $(x', y')$  に関する連立方程式だとみなして解を求めれば、新しい  $X'Y'$  座標系における点  $u$  の座標を求めることができるが、それは

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ y' &= -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。これが、現在の座標系で  $(x, y)$  である点の、座標軸を反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい座標系での座標となっている。なお、(5) 式と (9) 式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (11)$$

と書けるが、この行列を  $T_P$  と置く。また、(10) 式は行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (12)$$

であるが、ここに現れる行列を座標軸の回転行列  $T_A$  と呼ぶ。すなわち

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P^{-1} = \mathbf{T}'_P \quad (13)$$

であり、一般的に、現在の座標系で  $\mathbf{u} = (x, y)'$  である点（座標を立てベクトルで表してもの）の、座標軸を反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい座標系での座標  $\mathbf{v} = (x', y')'$  は

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_A \mathbf{u} \quad (14)$$

で与えられる。

回転行列  $T_A$  は以下の性質

$$T_A' T_A = T_A T_A' = I \quad (15)$$

を満たすが、このような性質を持つ行列のことを直交行列 (orthogonal matrix, orthonormal matrix) と呼ぶ。この性質から、直交行列の逆行列はそれ自身の転置であること

$$T_A^{-1} = T_A', \quad \text{and} \quad T_A'^{-1} = T_A^{-1'} = T_A \quad (16)$$

がわかる。なお、単位行列  $I$  や (11) 式の  $T_P$  も直交行列である。

### 1.1.1 加法定理

座標軸を反時計回りに  $\theta'$  回転する回転行列は

$$S = \begin{bmatrix} \cos(\theta') & \sin(\theta') \\ -\sin(\theta') & \cos(\theta') \end{bmatrix} \quad (17)$$

であるが、(14) 式より、座標軸をまず反時計回りに  $\theta$  だけ回転し、その後さらに、反時計回りに  $\theta'$  だけ回転した新しい座標軸における点  $u$  の座標は

$$v = S(T_A u) = (ST_A) u \quad (18)$$

となるが、(角度の周りの括弧を省略すると)

$$ST_A = \begin{bmatrix} \cos \theta' \cos \theta - \sin \theta' \sin \theta & \cos \theta' \sin \theta + \sin \theta' \cos \theta \\ -\sin \theta' \cos \theta - \cos \theta' \sin \theta & -\sin \theta' \sin \theta + \cos \theta' \cos \theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。しかし、この行列は、座標軸を反時計回りに  $\theta + \theta'$  だけ回転した座標における点  $u$  の座標を与える回転行列

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta + \theta') & \sin(\theta + \theta') \\ -\sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix} \quad (20)$$

に等しいはずである。したがって、対応する要素をくらべることにより、

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta' \cos \theta - \sin \theta' \sin \theta \quad (21)$$

$$= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad (22)$$

$$\sin(\theta + \theta') = \cos \theta' \sin \theta + \sin \theta' \cos \theta \quad (23)$$

$$= \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \quad (24)$$

を得るが、これらは三角関数の加法定理 (addition theorem) と呼ばれている。

座標軸を時計回りに  $\theta'$  回転する回転行列は、時計回りに  $-\theta'$  だけ回転する回転行列として表せるため、

$$S = \begin{bmatrix} \cos(-\theta') & \sin(-\theta') \\ -\sin(-\theta') & \cos(-\theta') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{bmatrix} \quad (25)$$

と書ける。したがって、反時計回りと同様の議論から

$$ST_A = \begin{bmatrix} \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta & \cos \theta' \sin \theta - \sin \theta' \cos \theta \\ \sin \theta' \cos \theta - \cos \theta' \sin \theta & \sin \theta' \sin \theta + \cos \theta' \cos \theta \end{bmatrix} \quad (26)$$

となるが、これは、座標軸を反時計回りに  $\theta - \theta'$  だけ回転した座標における点  $\mathbf{u}$  の座標を与える回転行列

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta') & \sin(\theta - \theta') \\ -\sin(\theta - \theta') & \cos(\theta - \theta') \end{bmatrix} \quad (27)$$

に等しいはずである。したがって、対応する要素をくらべることにより、

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \quad (28)$$

$$= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad (29)$$

$$\sin(\theta - \theta') = \cos \theta' \sin \theta - \sin \theta' \cos \theta \quad (30)$$

$$= \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' \quad (31)$$

を得る。

なお、2次元平面における回転はその順序に依存しないため、最初に  $\theta'$  回転しその後  $\theta$  回転しても同じ結果を得るはずであるが、確かに

$$T_A S = S T_A \quad (32)$$

であり積の交換法則 (commutative 可換性) を満たす。ただし、3次元以上の回転行列に関しては、一般の行列の掛け算と同様に、可換ではない。

## 1.2 基底ベクトルを用いた導出

横軸に  $x$  縦軸に  $y$  を取った平面上の点  $(x, y)$  を考える。原点からこの点までのベクトルを  $\mathbf{u}$  とする。2次元空間 (平面) の標準基底 standard basis を

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)' \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1)' \quad (33)$$

とするが、これらは長さが 1 のベクトルであるため単位ベクトル unit vector と呼ばれることもある。

2次元空間内の全てのベクトルは、この標準基底ベクトルを用いて表現することが出来るが、その表現の仕方は、ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすれば

$$\mathbf{u} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 = (x, y)' \quad (34)$$

である。すなわち、ベクトルの頂点の座標を重みとしてそれぞれの標準基底ベクトルを足し合わせれば良い。

この標準基底を反時計回りに  $\theta$  だけ回転して新たに標準基底  $\mathbf{e}_1^{(*)}, \mathbf{e}_2^{(*)}$  を作ると、図 2 に示すように、その頂点の座標は、元の座標系で

$$\mathbf{e}_1^{(*)} = (\cos(\theta), \sin(\theta))' \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_2^{(*)} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))' \quad (35)$$

と表される。なぜなら、 $\mathbf{e}_1^{(*)}$  の頂点の  $x$  座標は頂点から元の横軸に下ろした垂線の足の  $x$  座標であり、 $y$  座標は頂点から元の縦軸に下ろした垂線の足の  $y$  座標であるからである。 $\mathbf{e}_2^{(*)}$  も同様であるが、 $x$  座標は負となることに注意しなければならない。

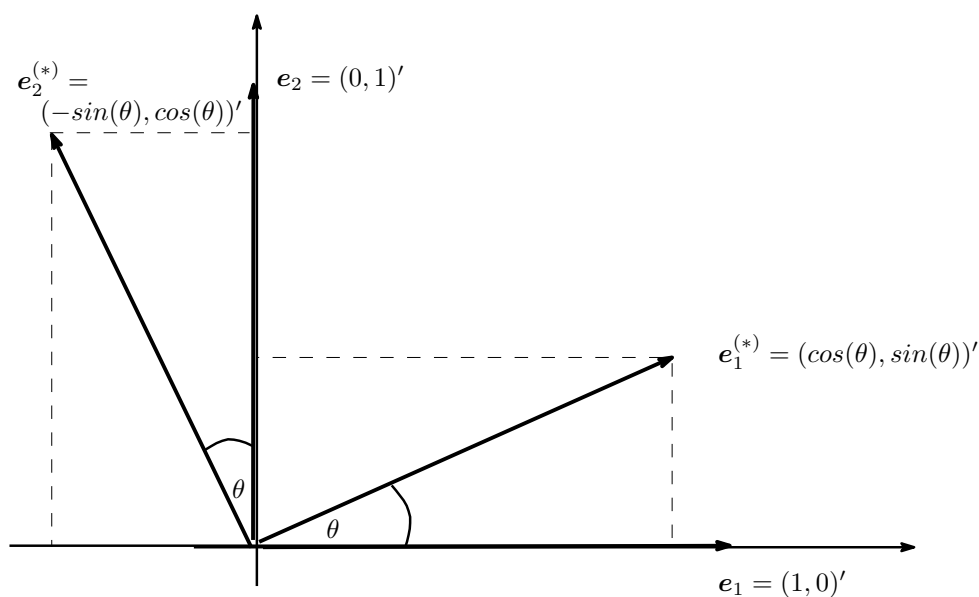


図2 座標軸の回転 2

この新しい標準基底を用いると、先ほどのベクトル  $\mathbf{u}$  は、 $x'$  ならびに  $y'$  を新しい座標軸で表されたベクトルの頂点の座標として

$$\mathbf{u} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$= x' \mathbf{e}_1^{(*)} + y' \mathbf{e}_2^{(*)} \quad (37)$$

$$= x' \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (38)$$

と書くことが出来る。したがって、対応する要素を等しいと置くことにより、

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y &= x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{aligned} \quad (39)$$

という関係を得るが、これは (5) 式 と (9) 式 と同じであるため、前節の導出と同様に回転行列は (13) 式 となる。

### 1.3 多次元空間における座標軸の回転

$r$  次元空間での座標軸の回転行列は以下に示す  $r \times r$  の直交行列として書き表すことができる。

$$\mathbf{Q} = \prod_{i>j} Q_{ij} \quad (40)$$

ただし  $Q_{ij}$  は  $r$  次元の単位行列を以下の様に置き換えた直交行列である。

$$Q_{ij}[i, i] = \cos(\theta_{ij}), \quad Q_{ij}[j, j] = \cos(\theta_{ij}), \quad Q_{ij}[i, j] = \sin(\theta_{ij}), \quad Q_{ij}[j, i] = -\sin(\theta_{ij}) \quad (41)$$

すなわち、 $Q_{ij}$  行列は以下の様な形をしている。

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} & & i & & j & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i \rightarrow & & 0 & 0 & \cos(\theta_{ij}) & 0 & 0 & \sin(\theta_{ij}) & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ j \rightarrow & & 0 & 0 & -\sin(\theta_{ij}) & 0 & 0 & \cos(\theta_{ij}) & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

(40) 式 が直交行列であることは各  $Q_{ij}$  が直交行列であることから

$$Q'Q = \left( \prod_{i>j} Q_{ij} \right)' \prod_{i>j} Q_{ij} \quad (43)$$

$$= (Q_{21}Q_{31}Q_{32} \cdots Q_{r,r-1})' Q_{21}Q_{31}Q_{32} \cdots Q_{r,r-1} \quad (44)$$

$$= Q'_{r,r-1} Q'_{r,r-2} \cdots Q'_{32} Q'_{31} Q'_{21} Q_{21} Q_{31} Q_{32} \cdots Q_{r,r-1} \quad (45)$$

$$= I_r \quad (46)$$

として示せる。

$r = 3$  次元の場合、 $Q_{ij}$  は

$$T_X = Q_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{32}) & \sin(\theta_{32}) \\ 0 & -\sin(\theta_{32}) & \cos(\theta_{32}) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$T_Y = Q_{31} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{31}) & 0 & \sin(\theta_{31}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{31}) & 0 & \cos(\theta_{31}) \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$T_Z = Q_{21} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{21}) & \sin(\theta_{21}) & 0 \\ -\sin(\theta_{21}) & \cos(\theta_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

であるが、それぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸の周りの回転行列となる。なお、先に示した2次元の場合は、それを  $z$  軸の周りの回転と考えることになるが、ある軸の周りに回転することは、その軸の座標値は変わらないことになる。その意味で、 $Q_{ij}$  行列は  $r$  次元のうち第  $i$  軸と  $j$  軸以外の軸の周りの回転を表す行列ということができ、その意味は、 $r$  次元のうち第  $i$  軸と  $j$  軸で構成される平面場の回転ということである。

一般的に、多次元の回転行列は可換ではない。たとえば

$$T_X T_Y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{31}) & 0 & \sin(\theta_{31}) \\ -\sin(\theta_{32})\sin(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \sin(\theta_{32})\cos(\theta_{31}) \\ -\cos(\theta_{32})\sin(\theta_{31}) & -\sin(\theta_{32}) & \cos(\theta_{32})\cos(\theta_{31}) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$T_Y T_X = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{31}) & -\sin(\theta_{31})\sin(\theta_{32}) & \sin(\theta_{31})\cos(\theta_{32}) \\ 0 & \cos(\theta_{32}) & \sin(\theta_{32}) \\ -\sin(\theta_{31}) & -\cos(\theta_{31})\sin(\theta_{32}) & \cos(\theta_{31})\cos(\theta_{32}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

である。

## 2 点の回転

ここまでは空間の座標軸を回転した時に元の座標系で  $(x, y)$  である点の新しい座標系での座標  $(x', y')$  を求める方法を示してきたが、本節では、空間内の点  $u$  を原点の周りに反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい点  $v$  の座標  $(x', y')$  を求める。

図3 に点  $u$  と  $v$  をベクトルとして示した。また、元の座標軸を時計回りに  $\theta$ 、すなわち、反時計回りに  $-\theta$  回転して得られる座標軸  $X'Y'$  を示した。 $u$  からこの  $X'$  軸へ下ろした垂線の足が  $A$  であり、 $v$  から  $X$  軸へ下ろした垂線の足が  $B$  である。求めるべき座標は  $x'$  が  $|\overline{OB}|$ 、 $y'$  が  $|\overline{vB}|$  であるが、ここで、 $\triangle vOB$  と  $\triangle uOA$  が合同であることから、 $x' = |\overline{OA}|$ 、 $y' = |\overline{uA}|$  となる。したがって、点  $u$  を原点の周りに反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい点  $v$  の

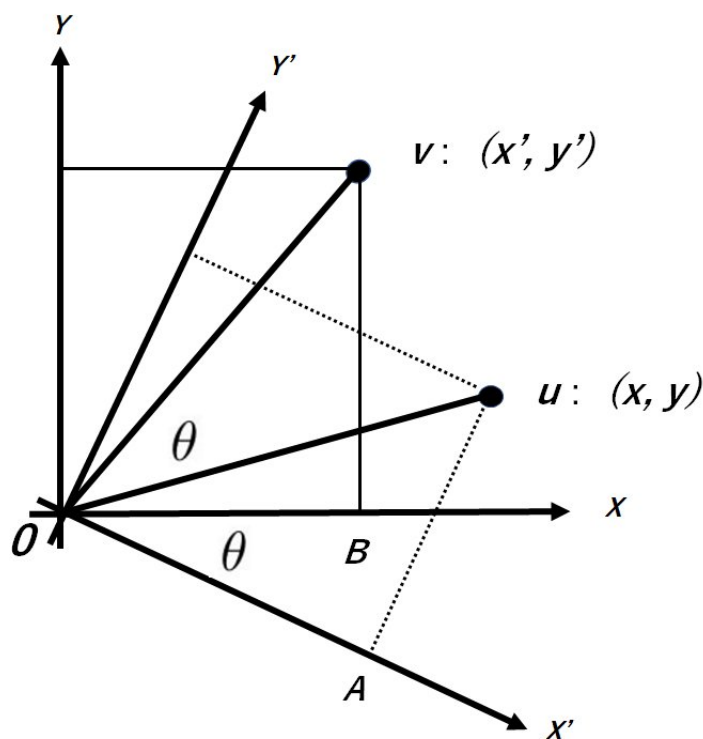


図3 点の回転

座標  $(x', y')$  は座標系  $XY$  を反時計回りに  $-\theta$  だけ回転して得られる座標系  $X'Y'$  における点  $u$  の座標として得られることになり、その回転行列は (13) 式の  $\theta$  を  $-\theta$  に置き換えて得られる行列

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = T_P \quad (52)$$

として得られる。すなわち、点  $u = (x, y)$  を原点の周りに反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい点  $v$  の座標は

$$v = T_P u \quad (53)$$

として得られる。

最後に、点  $u$  を点  $c = (c_1, c_2)'$  の周りに反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい点  $v$  の座標  $(x', y')$  は

$$v = T_p(u - c) + c \quad (54)$$

となる。(証明略)

### 3 射影と鏡像

図 4 には、点  $u$  とその直線  $\overline{OD}$  に関する鏡像  $v$  が示されている。また、 $B$  は  $u$  から直線  $\overline{OD}$  に下ろした垂線の足である。いま、点  $u$  の座標が  $(x, y)$  であるとき、その鏡像  $v$  の座標は以下のようにして求めることができる。

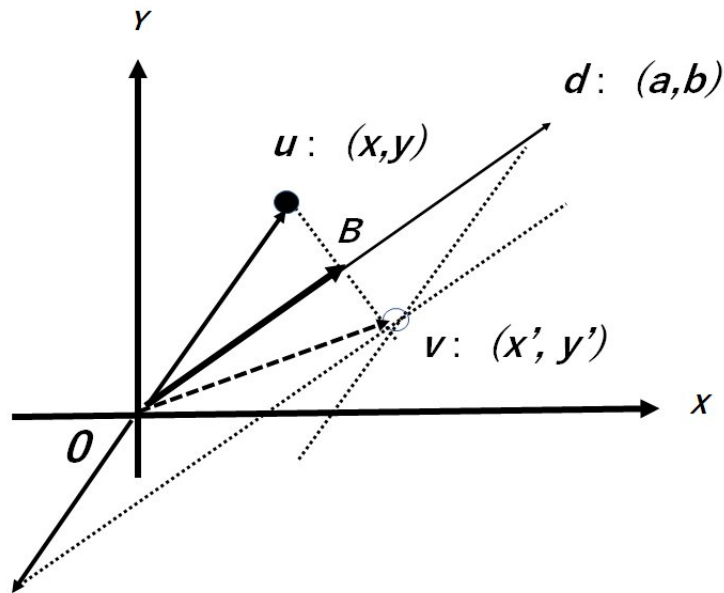


図 4 点の鏡像

幾何学的なベクトルで考えると、

$$\vec{Ov} = \vec{u} + 2\vec{uB} \quad (55)$$

となるが、垂線の足  $B$  の座標は、射影演算子

$$P(d) = \frac{1}{d'd} dd' = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

を用いて

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P(d) \mathbf{u} \quad (57)$$

と表されるため

$$\vec{uB} = \vec{OB} - \vec{Ou} = P(d) \mathbf{u} - \mathbf{u} \quad (58)$$



である。したがって、(55) 式は

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2(\mathbf{P}(\mathbf{d}) \mathbf{u} - \mathbf{u}) = 2\mathbf{P}(\mathbf{d}) \mathbf{u} - \mathbf{u} = (2\mathbf{P}(\mathbf{d}) - \mathbf{I})\mathbf{u} \quad (59)$$

となる。

2次元の場合は、直線  $\overline{OD}$  と  $x$  軸との間の角度は  $\theta$  であるとする、

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (60)$$

となる。( (59) 式 との関係は三角関数の倍角の公式となる。)

なお、直線  $d$  が原点を通らず、点  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)'$  を通る場合の点  $\mathbf{u}$  から直線  $d$  の下ろした垂線の足の座標は

$$\mathbf{b} = \mathbf{P}(\mathbf{d})(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \quad (61)$$

であり、直線  $d$  に関する  $\mathbf{u}$  の鏡像は

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{P}(\mathbf{d})(\mathbf{u} - \mathbf{c}) - \mathbf{u} \quad (62)$$

となる。(証明略)

ちなみに、原点から  $d$  の頂点の方向へ測った  $\mathbf{b}$  までの距離は、ベクトル  $\mathbf{u}$  のベクトル  $d$  へのスカラー射影 (scalar projection) と呼ばれることがある。また、ベクトル  $|\overline{B}|$  はベクトル  $\mathbf{u}$  のベクトル  $d$  への正射影ベクトルと呼ばれる。

さ d k l f j aaa

## 4 図形の変形

平面場の多角形はその頂点の座標を集めた行列として表現できる。より一般的には図形を形成する点の集合の座標を持つ行列となる。例えば、頂点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$  を持つ正方形は

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

となるが、その各行  $\mathbf{x}'_i = (x_{i1}, x_{i2})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , が各頂点の座標となる。図形の変形は、この行列に対する操作、すなわち、各行に同じ操作を行うこととして扱うことができる。高次元の場合は行列の列数を増やすことになる。

- 座標軸に平行な移動 (translation)

図形を  $x$  軸方向へ  $a$ ,  $y$  軸方向へ  $b$  だけ移動する操作は、 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)'$  として、

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{1}\mathbf{c}' \quad (64)$$

である。要素で書けば

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{c} + \mathbf{x}_i, \quad \text{or} \quad y_{i1} = c_1 + x_{i1}, \quad y_{i2} = c_2 + x_{i2} \quad (65)$$

である。

なお、これに対応して、座標軸の原点を  $c$  に動かして得られる新たな座標軸における点の座標は

$$Y = X - 1c' \quad (66)$$

となる。

- 座標軸に沿った伸縮、座標軸の反転 (stretch, sign reverse)

図形を縦方向または横方向に伸縮する操作は、 $D$  を対角要素  $d_1, d_2$  を持つ対角行列として

$$Y = X D \quad (67)$$

となる。要素ごとに書けば

$$y_i = D x_i, \quad \text{or} \quad y_{i1} = x_{i1}d_1, \quad y_{i2} = x_{i2}d_2 \quad (68)$$

である。なお、これに対応して、座標軸の単位を定数倍して得られる新たな座標軸、すなわち、元の座標軸の 1 を  $d_j$  と読み替えた新しい座標軸、における点の座標は

$$Y = X D^{-1} \quad (69)$$

となる。

$D$  行列の対角要素がとして  $-1$  を用いれば、その座標軸の符号が反転される。例えば  $d_1 = 1, d_2 = -1$  の場合は  $y_{i1} = x_{i1}, y_{i2} = -x_{i2}$  であるが、これは以下に示す  $x$  軸に関する鏡像に相当し  $\theta = 0$  の場合である。

- 軸の交換 (permutation)

$D$  行列として、各行や各列に一つの 1 を持ち、他の要素が 0 である行列を用いれば、座標軸を交換することができる。例えば

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (70)$$

とすると  $x$  軸と  $y$  軸が交換されるが、これは以下に示す直線  $y = x$  に関する鏡像に相当し  $\theta = \pi/4$  の場合である。

- 原点の周りの図形の回転 (rotation)

図形を反時計回りに  $\theta$  だけ回転して得られる新しい図形の座標は、回転行列を

$$T_p = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (71)$$

として、

$$Y = X T_p' \quad (72)$$

である。要素ごとに書けば

$$y_i = T_p x_i \quad (73)$$

である。なお、 $X$  行列の各行が  $x_i$  の転置、 $Y$  行列の各行が  $y_i$  の転置となっているため、 $Y$  行列は  $y_i' = x_i' T_p'$  を縦に並べたものとなっている。

- 直線の周りの鏡像 (reflection)

図形を  $x$  軸と  $\theta$  の角度を持つ直線に関して反転して得られる鏡像は、

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad (74)$$

として

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{R} \quad (75)$$

となる。(  $\mathbf{R}$  は対称であるため転置記号は省いた。) 要素ごとに書けば

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{R} \mathbf{x}_i \quad (76)$$

である。

なお、 $\theta$  が  $\pi/2$  の定数倍の場合には  $\mathbf{R}$  行列は対角行列となり、軸の反転や交換に相当する。

- せん断 (shear)

図形の各座標を、定数  $m$  を用いて

$$(x_{i1}, x_{i2}) \rightarrow (x_{i1} + m x_{i2}, x_{i2}) \quad (77)$$

と変換する変換のことを  $x$  軸方向のせん断と呼び、

$$(x_{i1}, x_{i2}) \rightarrow (x_{i1}, m x_{i1} + x_{i2}) \quad (78)$$

という変換を  $y$  軸方向のせん断と呼ぶ。  $x$  軸方向の剪断を表す行列を  $\mathbf{S}_x$ 、  $y$  軸方向の剪断を表す行列を  $\mathbf{S}_y$  とすれば

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

である。

したがって、せん断された図形の座標行列は

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{S}' \quad (80)$$

となる。

一般的に、図形の変形は、これらの演算を累積的に施したものとなる。特に、回転と伸張を繰り返すことにより、一般的な変形を表すことができる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{D}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{T}_2 \cdots \quad (81)$$

また、座標行列の右から正方行列  $\mathbf{Q}$  を掛けることにより表現できる図形の変形は、  $\mathbf{V}$  行列の特異値分解を用いて

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{Q} = \mathbf{X} \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}' \quad (82)$$

と回転と伸縮の組み合わせに分解することが可能である。