

# 回転について

前川真一

20200521, 2020. 5. 26

## 1 基底ベクトル

横軸に  $x$  縦軸に  $y$  を取った平面上の点  $(x, y)$  を考える。原点からこの点までのベクトルを  $\mathbf{u}$  とする。② 2次元空間（平面）の標準基底 standard basis を

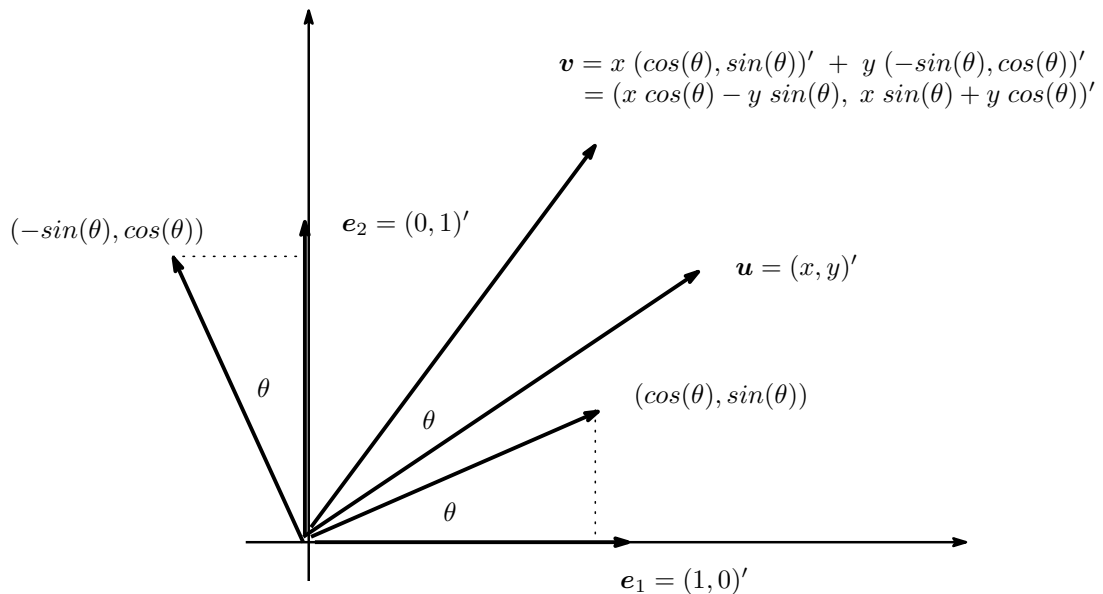
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)' \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1)' \quad (1)$$

とする。これらは、標準基底ベクトル、もしくは基底ベクトルと呼ばれる。また、これらは長さが 1 のベクトルであるため単位ベクトル unit vector と呼ばれることもある。

2次元空間内の全てのベクトルは、この標準基底ベクトルを用いて表現することが出来るが、 $\mathbf{u}$  は

$$\mathbf{u} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 \quad (2)$$

である。すなわち、頂点の座標を重みとしてそれぞれの標準基底ベクトルを足し合わせれば良い。



## 2 ベクトルの回転

いま、標準基底ベクトルを反時計回りに角度  $\theta$  だけ回転したものを  $\mathbf{e}_1^{(*)}$ ,  $\mathbf{e}_2^{(*)}$  とすれば、三角関数の定義より、

$$\mathbf{e}_1^{(*)} = (\cos(\theta), \sin(\theta))' \quad \text{and} \quad \mathbf{e}_2^{(*)} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))' \quad (3)$$

である。したがって、 $\mathbf{u}$  を角度  $\theta$  だけ回転したベクトル  $\mathbf{v}$  はこの新しい標準基底ベクトルを用いれば

$$\mathbf{v} = x \mathbf{e}_1^{(*)} + y \mathbf{e}_2^{(*)} \quad (4)$$

と書くことが出来るが、これに Eq.(3) を用いれば

$$\mathbf{v} = x (\cos(\theta), \sin(\theta))' + y (-\sin(\theta), \cos(\theta))' \quad (5)$$

$$= (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))' \quad (6)$$

となるが、これは、回転行列を

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (7)$$

と置けば

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (8)$$

と表現できる。