

23-215-12
心理測定のための数学的道具

前川眞一

#04

1

回帰モデル

$$y_i = \hat{y}_i + e_i \quad \mathcal{E}(e_i) = 0$$

where $\hat{y}_i = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,$

線型回帰モデル

$$\hat{y}_i = f(\mathbf{x}_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^q x_{ij}\beta_j$$

最小2乗基準:残差の2乗和

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

2

線形回帰モデルの行列表現

$$\begin{aligned}\hat{y}_i = f(\mathbf{x}_i) &= \beta_0 + \sum_{j=1}^q x_{ij}\beta_j \\ &= \sum_{j=0}^q x_{ij}\beta_j && x_{i0} = 1 \\ &= \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

3

ベクトルとその転置

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{a}')' = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)'$$

$$\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_r)$$

4

ベクトルの加算減算

サイズが等しい二つの $r \times 1$ のベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)' \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)'$$

の和もしくは差は

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_r \pm b_r)'$$

となり、 $r \times 1$ のベクトルとなる。

ベクトルとスカラー数 (scalar) λ の積は、各要素とそのスカラー数との積で定義される。

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_r)'$$

なお、 λ で割ること商は $\frac{1}{\lambda}$ を掛けることに等しい。

5

ベクトルの加算減算

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda \quad (\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \pm \lambda \mathbf{1}_r \quad \text{or} \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{1}_r \lambda$$

6

例

二人の人の身体測定値 $\mathbf{m}_1 = (h_1, w_1, s_1)'$ と $\mathbf{m}_2 = (h_2, w_2, s_2)'$ の平均は

$$\begin{aligned} m. &= \frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) &= \frac{1}{2}((h_1, w_1, s_1)' + (h_2, w_2, s_2)') \\ &= \frac{1}{2}(h_1 + h_2, w_1 + w_2, s_1 + s_2)' &= \left(\frac{h_1 + h_2}{2}, \frac{w_1 + w_2}{2}, \frac{s_1 + s_2}{2} \right)' \end{aligned}$$

となる。一般的に、 p 個のベクトル $\mathbf{m}_i, i = 1, 2, \dots, p$ の平均値は

$$m. = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbf{m}_i$$

となる。ただし、 \mathbf{m}_i は添え字が付いているが、それ自身

$$\mathbf{m}_i = (h_i, w_i, s_i)'$$

と表される、第 i 番目の人の測定値を表すベクトルである。

7

ベクトルの内積

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{b} &= \sum_{i=1}^r a_i b_i \\ &= a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_r \times b_r \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_r) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

8

ベクトルの内積

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'\mathbf{b} &= (a_1, a_2, \dots, a_r) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r a_i b_i \\ &= a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_r \times b_r \end{aligned}$$

9

例

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 5 \times 7 = 47$$

ベクトル \mathbf{a} の要素の平均 m と分散 s^2

$$m = \frac{1}{r} \mathbf{a}'\mathbf{1}, \quad s^2 = \frac{1}{r} \mathbf{a}'\mathbf{a} - m^2$$

10

ベクトルの内積

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a}$$

行ベクトルと単位ベクトルの積

$$\mathbf{a}'\mathbf{1} = \mathbf{1}'\mathbf{a} = \sum_{i=1}^r a_i \times 1 = \sum_{i=1}^r a_i$$

自分自身の転置との内積

$$\mathbf{a}'\mathbf{a} = \sum_{i=1}^r a_i \times a_i = \sum_{i=1}^r a_i^2$$

この平方根をベクトルの長さ（ノルム）(norm) と呼び、 $\|\mathbf{a}\|$ と書く。

11

内積の演算規則

$$\mathbf{a}'(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}'\mathbf{b} + \mathbf{a}'\mathbf{c}$$

$$(\lambda\mathbf{a})'\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}'\mathbf{b})$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

行列

- 行列とは

- 何かを2次元の表の様に配置したもの。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2c} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ic} \\ & & & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix}$$

$$A = \{a_{ij}\}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, c$$

- 列ベクトル（縦ベクトル）を横に並べたもの。
- 行ベクトル（横ベクトル）を縦に並べたもの。

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2c} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ic} \\ & & & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_r \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \dots, \mathbf{a}_{(j)}, \dots \mathbf{a}_{(c)})$$

行列の転置

$r \times c$ の行列 A の行と列を交換したものを行列 A の**転置行列**と呼び A' と書く。これは $c \times r$ の行列

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{r2} \\ & & \vdots & & & \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{rj} \\ & & \vdots & & & \\ a_{1c} & a_{2c} & \dots & a_{ic} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_{(1)} \\ \mathbf{a}'_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{(c)} \end{pmatrix}$$
$$= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_r)$$

$$(A')' = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

15

行列の演算規則

加算と減算

行と列のサイズが等しくないと駄目。

$$A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\}$$

$$= (\mathbf{a}_{(1)} \pm \mathbf{b}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)} \pm \mathbf{b}_{(2)}, \dots, \mathbf{a}_{(c)} \pm \mathbf{b}_{(c)})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \pm \mathbf{b}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \pm \mathbf{b}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_r \pm \mathbf{b}'_r \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = A\lambda = \{\lambda a_{ij}\},$$

16

行列とベクトルの積

行列 A の右から縦ベクトル b を掛ける。
縦ベクトル b の左から行列 A を掛ける。

行列の列のサイズと
ベクトルの長さが等しくないと
駄目。

$$Ab = \left\{ \sum_{k=1}^c a_{ik} b_k \right\}$$

行列 A の各行とベクトル b の内積を
縦に並べたもの。

$$= \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_a \end{pmatrix} \times b = \begin{pmatrix} a'_1 b \\ a'_2 b \\ \vdots \\ a'_i b \\ \vdots \\ a'_a b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^b a_{1k} b_k \\ \sum_{k=1}^b a_{2k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^b a_{ik} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^b a_{rk} b_k \end{pmatrix}$$

17

行列とベクトルの積

$$\left\{ \sum_{k=1}^b a_{ik} b_k \right\} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_c \end{pmatrix} \times$$

$$Ab = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ic} \\ & & \vdots & \\ a_{a1} & a_{a2} & \dots & a_{ac} \end{pmatrix}$$

18

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + 5 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 47 \end{pmatrix}$$

19

例：連立方程式（ r 元）

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1r}x_r = c_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2r}x_r = c_2 \\ & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + & a_{i2}x_2 + & \dots + & a_{ir}x_r = c_i \\ & & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + & a_{r2}x_2 + & \dots + & a_{rr}x_r = c_r \end{array} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

20

行列と行列の積

A 行列の右から B 行列を掛ける。
B 行列の左から A 行列を掛ける。

A の列サイズと B の行サイズが
等しくないと駄目。

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_a \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = (\mathbf{b}_{(1)}, \mathbf{b}_{(2)}, \dots, \mathbf{b}_{(c)})$$

B を列ベクトルの集まりと見る。

$$AB = A \times (\mathbf{b}_{(1)}, \mathbf{b}_{(2)}, \dots, \mathbf{b}_{(j)}, \dots, \mathbf{b}_{(c)})$$

A b の集まりになる。

$$= (\mathbf{Ab}_{(1)}, \mathbf{Ab}_{(2)}, \dots, \mathbf{Ab}_{(j)}, \dots, \mathbf{Ab}_{(c)})$$

$$= \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_a \end{pmatrix} \times (\mathbf{b}_{(1)}, \mathbf{b}_{(2)}, \dots, \mathbf{b}_{(j)}, \dots, \mathbf{b}_{(c)})$$

A が $n \times a$, B が $a \times c$ だと AB は $n \times c$ になる。

$$= \left\{ \sum_{k=1}^a a'_{ik} b_k \right\}$$

21

行列の積

$$AB = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1b}) \\ (a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2b}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ib}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{a1} & a_{a2} & \dots & a_{ab}) \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{b1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{b2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{bj} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1c} \\ b_{2c} \\ \vdots \\ b_{bc} \end{pmatrix} \right)$$

$$\left\{ a'_i \mathbf{b}_{(j)} \right\}$$

22

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 & -14 \\ 12 & 24 & 36 & -12 \end{pmatrix}$$

対角行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 27 \\ 2 & -20 & 54 \end{pmatrix}$$

23

対角行列の積

$$AD = (\mathbf{a}_{(1)}d_{11}, \mathbf{a}_{(2)}d_{22}, \dots, \mathbf{a}_{(j)}d_{jj}, \dots, \mathbf{a}_{(b)}d_{bb}) = \{a_{ij}d_{jj}\},$$
$$DA = \begin{pmatrix} d_{11}\mathbf{a}'_1 \\ d_{22}\mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ d_{ii}\mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ d_{aa}\mathbf{a}'_a \end{pmatrix} = \{d_{ii}a_{ij}\}$$

$$AI = IA = A$$

24

積和行列単位行列

$$A' A = \left\{ \sum_{k=1}^b a_{ki} a_{kj} \right\}$$

(正規) 直交行列

$$A' A = A A' = I$$

25

ベクトルの外積

$r \times 1$ の縦ベクトル \mathbf{a} に右から $1 \times c$ の行ベクトル \mathbf{b}' を掛ける

$$\mathbf{a}\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \times (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_c) = \{ a_i b_j \}$$

26

行列の演算規則

A と B を $r \times c$ の行列とする。

$$C = A \pm B, \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

C 行列は元の行列と同じサイズ

A を $ra \times ca$ B を $rb \times cb$ の行列とする。

$ca = rb$ の場合

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{ca} a_{ik} b_{kj}$$

C 行列のサイズは $ra \times cb$

$cb = ra$ の場合

$$\begin{aligned} C = BA, \quad c_{ij} &= \sum_{k=1}^{ra} b_{ik} a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{ra} a_{kj} b_{ik}, \end{aligned}$$

C 行列のサイズは $rb \times ca$

27

$ra = rb$ の場合

$$C = A'B, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{ra} a_{ki} b_{kj}$$

$rb = ra$ の場合

$$C = B'A, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{rb} b_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{rb} a_{kj} b_{ki}$$

自分自身の転置との積

$$C = A'A, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{ra} a_{ki} a_{kj}$$

$$C = AA', \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{ca} a_{ik} a_{jk}$$

28

対角行列を作る演算子 diag

$$C = \text{diag}(\mathbf{A})\mathbf{B}, \quad c_{ij} = a_{ii}b_{ij}$$

$$C = \mathbf{A}\text{diag}(\mathbf{B}), \quad c_{ij} = a_{ij}b_{jj}$$

$$C = \text{diag}(\mathbf{A})\text{diag}(\mathbf{B}), \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}b_{ii} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

29

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{B} + (\mathbf{A} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{and} \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$$

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}', \quad (\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}', \quad (\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$$

行列 \mathbf{A} の全ての要素にスカラー量 λ を足したり引いたりする演算

$$\mathbf{A} \pm \lambda \mathbf{1}_r \mathbf{1}'_c \quad \text{or} \quad \mathbf{A} \pm \mathbf{1}_r \mathbf{1}'_c \lambda \quad \text{or} \quad \mathbf{A} \pm \mathbf{1}_r \lambda \mathbf{1}'_c$$

30

その他

ベクトルの2次形式

$$\begin{aligned} b'Ab &= b'(Ab) = \sum_{i=1}^r b_i \sum_{j=1}^r a_{ij} b_j \\ &= \sum_{i=1}^r a_{ii} b_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} b_i b_j \quad (\mathbf{A} \text{ が対称の場合}) \end{aligned}$$

行列のトレース

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^r a_{jj} \quad \operatorname{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}') = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c a_{ij}^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\lambda) &= \lambda, \quad \operatorname{tr}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\operatorname{tr}(\mathbf{A}), \quad \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}') \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{A}') = \operatorname{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}'), \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}') = \operatorname{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{A}'\mathbf{C}') = \operatorname{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{C}'\mathbf{B}') \\ \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} &= \operatorname{tr}(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}') \end{aligned}$$

31

逆行列

正方行列 \mathbf{A} にある行列を右または左から掛けたとき

その結果が単位行列となるような行列を \mathbf{A} の **逆行列** (inverse) と呼び、

\mathbf{A}^{-1} で示す。

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

2 × 2 の行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

32

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

33

逆行列の演算規則

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}, \quad (\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})', \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

34

連立方程式

$$Ax = c \quad \leftarrow \rightarrow \quad = A^{-1}Ax = A^{-1}c$$

$$\leftarrow \rightarrow \quad x = A^{-1}c$$