

23-215-12
心理測定のための数学的道具

前川眞一

#03

1

最小2乗解

$$\text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

和の微分は微分の和！

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + n))^2$$

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} = \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial (-\hat{y}_i)}{\partial m}$$

$$= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \times (-x_i)$$

$$= -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + n)) \times x_i$$

2

最小2乗解

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial (-y_i)}{\partial n} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \times (-1) \\ &= -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n))\end{aligned}$$

3

最小2乗解

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} = -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) \times x_i = 0$$

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} = -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) = 0$$

個体番号	X (X1)	Y (X2)
1	1	2
2	2	4
3	5	2
4	7	5

$$79m + 15n = 55$$

$$15m + 4n = 13$$

4

一般式

総和記号の公式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} &= -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) \times x_i \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) \times x_i \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^n (y_i x_i - mx_i^2 - nx_i) \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n mx_i^2 - \sum_{i=1}^n nx_i \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^n y_i x_i - m \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \sum_{i=1}^n x_i \right] = 0\end{aligned}$$

したがって、正規方程式は

$$\begin{aligned}m \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) n &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \quad 79m + 15n = 55\end{aligned}$$

5

一般式

同様に（データ数を n から N に変更してある。）

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} &= -2 \times \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + n)) \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + n)) \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N mx_i - \sum_{i=1}^N n \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^N y_i - m \sum_{i=1}^N x_i - n \sum_{i=1}^N 1 \right] \\ &= -2 \times \left[\sum_{i=1}^N y_i - m \sum_{i=1}^N x_i - n N \right] = 0\end{aligned}$$

したがって、正規方程式は

$$\begin{aligned}m \sum_{i=1}^N x_i + n N &= \sum_{i=1}^N y_i \\ \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) m + N n &= \sum_{i=1}^N y_i \quad 15m + 4n = 13\end{aligned}$$

6

