

23-215-12
心理測定のための数学的道具

前川眞一

mayekawa@nifty.com

1

授業内容

- 1 イントロダクション
 - a 心理測定学における数学的道具の利用
 - b 最小2乗法によるモデルの当てはめ *
- 2 総和記号演算
 - a 定義
 - b 演算規則
 - c 総和記号を含む関数の微分
- 3 行列演算
 - a 定義と行列の種類
 - b 行列の四則演算規則
 - c 総和記号との関係
 - d その他の行列、その他の演算規則
- 4 その他の話題
 - a 行列の階数
 - b 逆行列と Sweep 演算子
 - c 固有値・固有ベクトル・特異値分解
 - d 関数の微分
 - e 線型モデル

2

漸化式 (同値)

$$\begin{aligned}
 S_i &= S_{i-1} + c S_{i-1} \\
 &= (1+c) S_{i-1} \\
 &\quad \text{この } S_{i-1} \text{ に } S_{i-1} = (1+c) S_{i-2} \text{ を代入すると} \\
 &= (1+c)^2 S_{i-2} \\
 &\quad \text{同様に } S_{i-2} = (1+c) S_{i-3} \text{ を代入して} \\
 &= (1+c)^3 S_{i-3} \\
 &\quad \vdots \\
 &= (1+c)^{i-1} S_1, \quad i = 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}$$

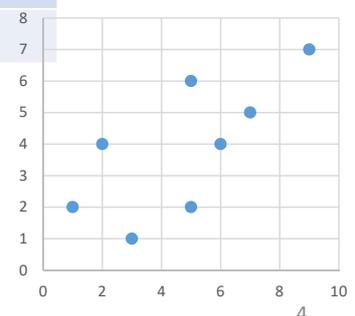
$$\begin{aligned}
 S_{i+1} &= S_i + c S_i \\
 &= (1+c) S_i \\
 &\quad \text{この } S_i \text{ に } S_i = (1+c) S_{i-1} \text{ を代入すると} \\
 &= (1+c)^2 S_{i-1} \\
 &\quad \text{同様 } S_{i-1} = (1+c) S_{i-2} \text{ を代入して} \\
 &= (1+c)^3 S_{i-2} \\
 &\quad \vdots \\
 &= (1+c)^i S_1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

最小2乗法によるモデルの当てはめ

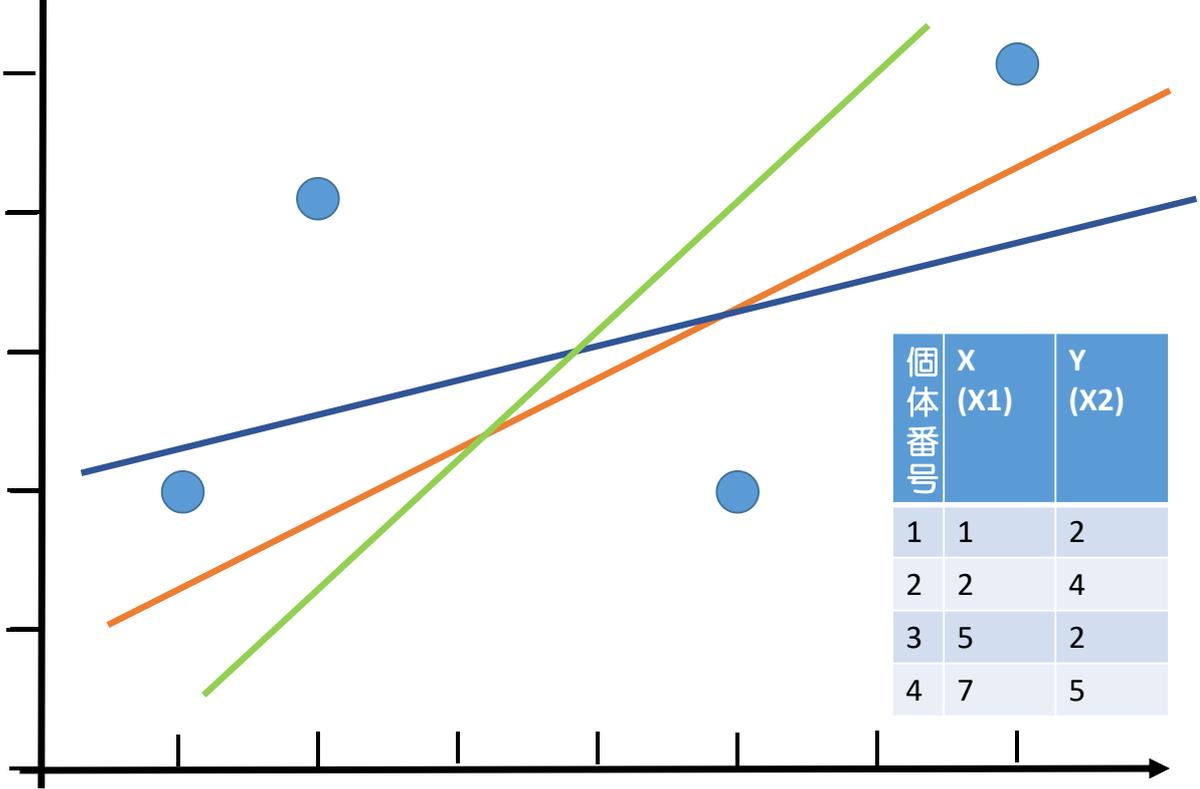
個体番号	X (X1)	Y (X2)
1	1	2
2	2	4
3	5	2
4	7	5
5	6	4
6	3	1
7	9	7
8	5	6

XとYの関係を知りたい。

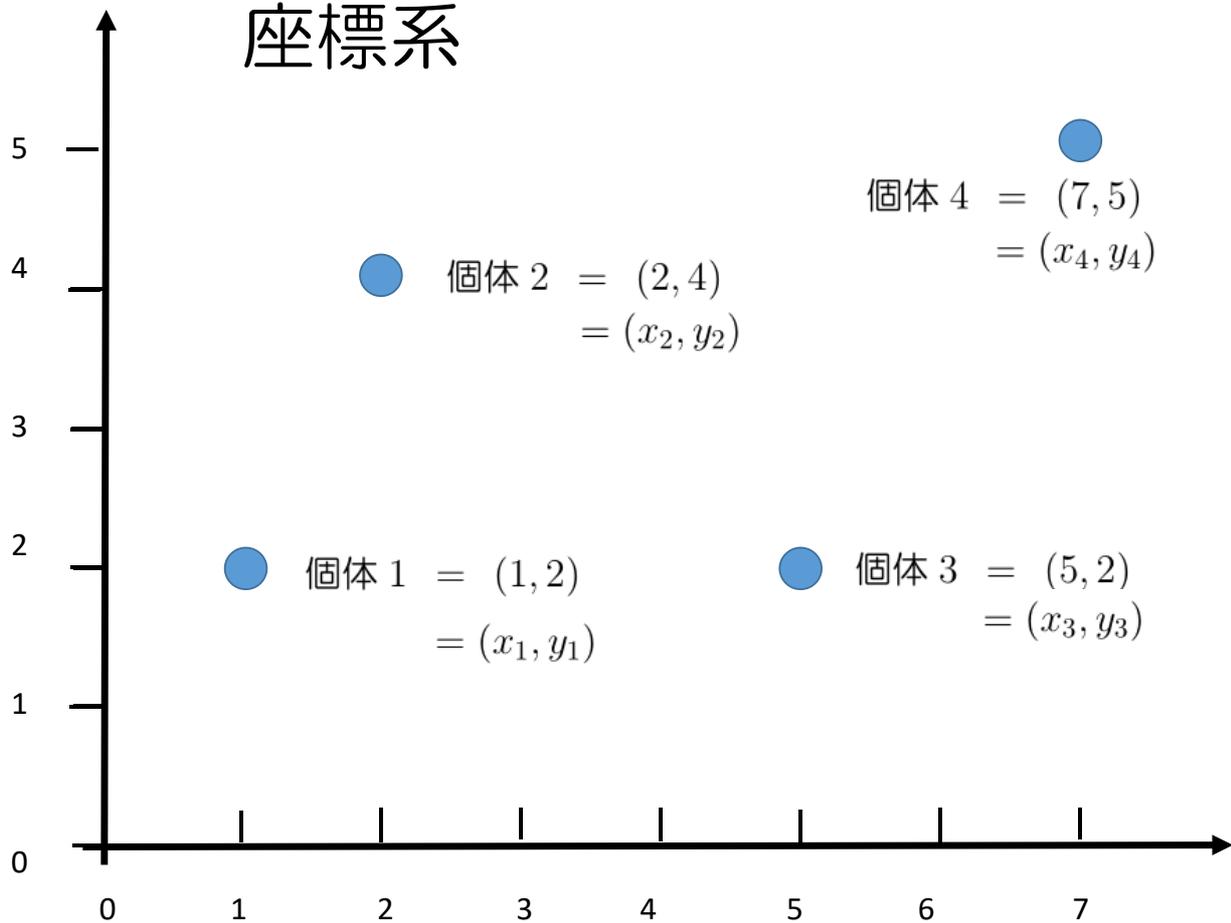
XでYを予測したい。
YをXで説明したい。



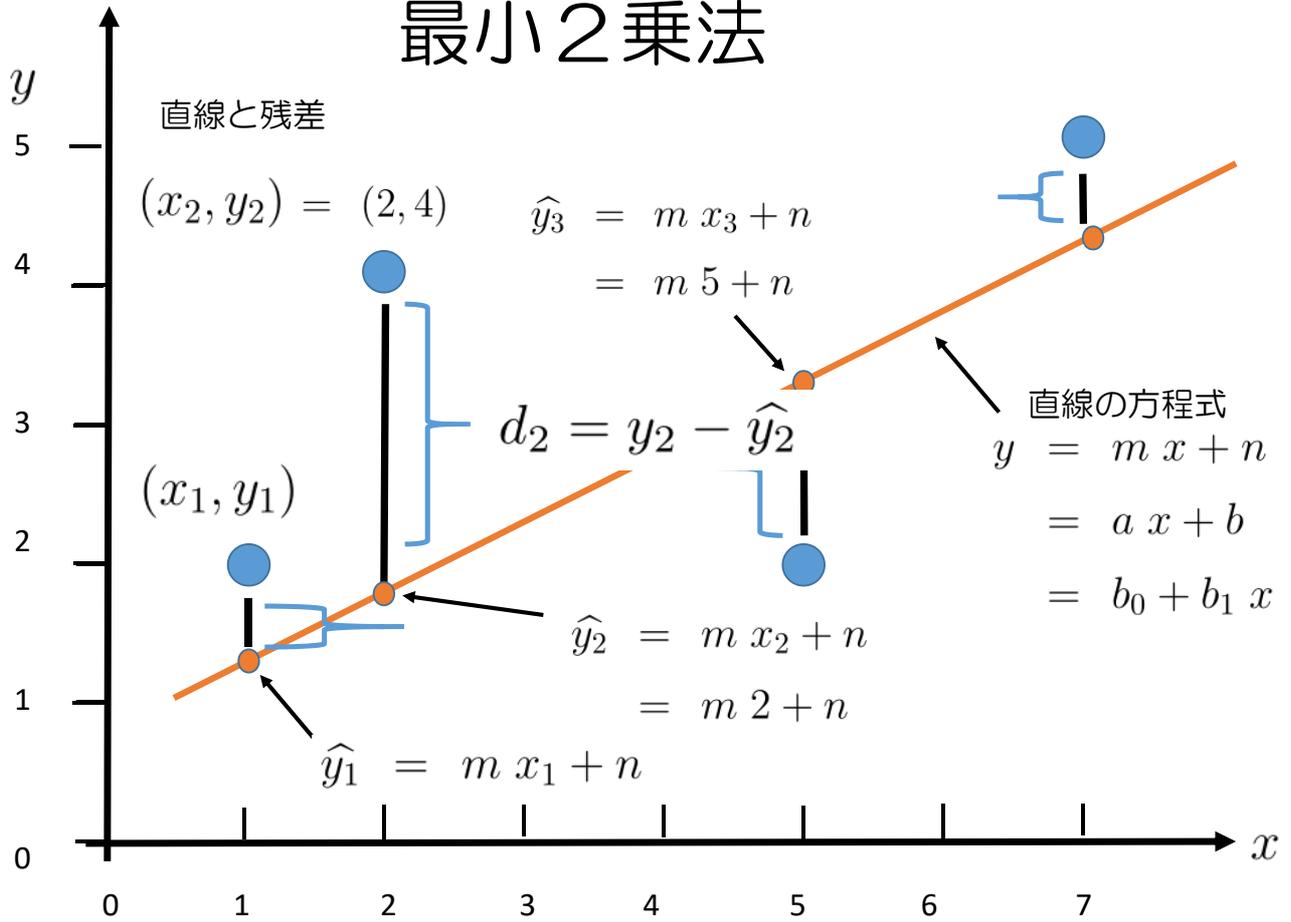
最小2乗法によるモデルの当てはめ



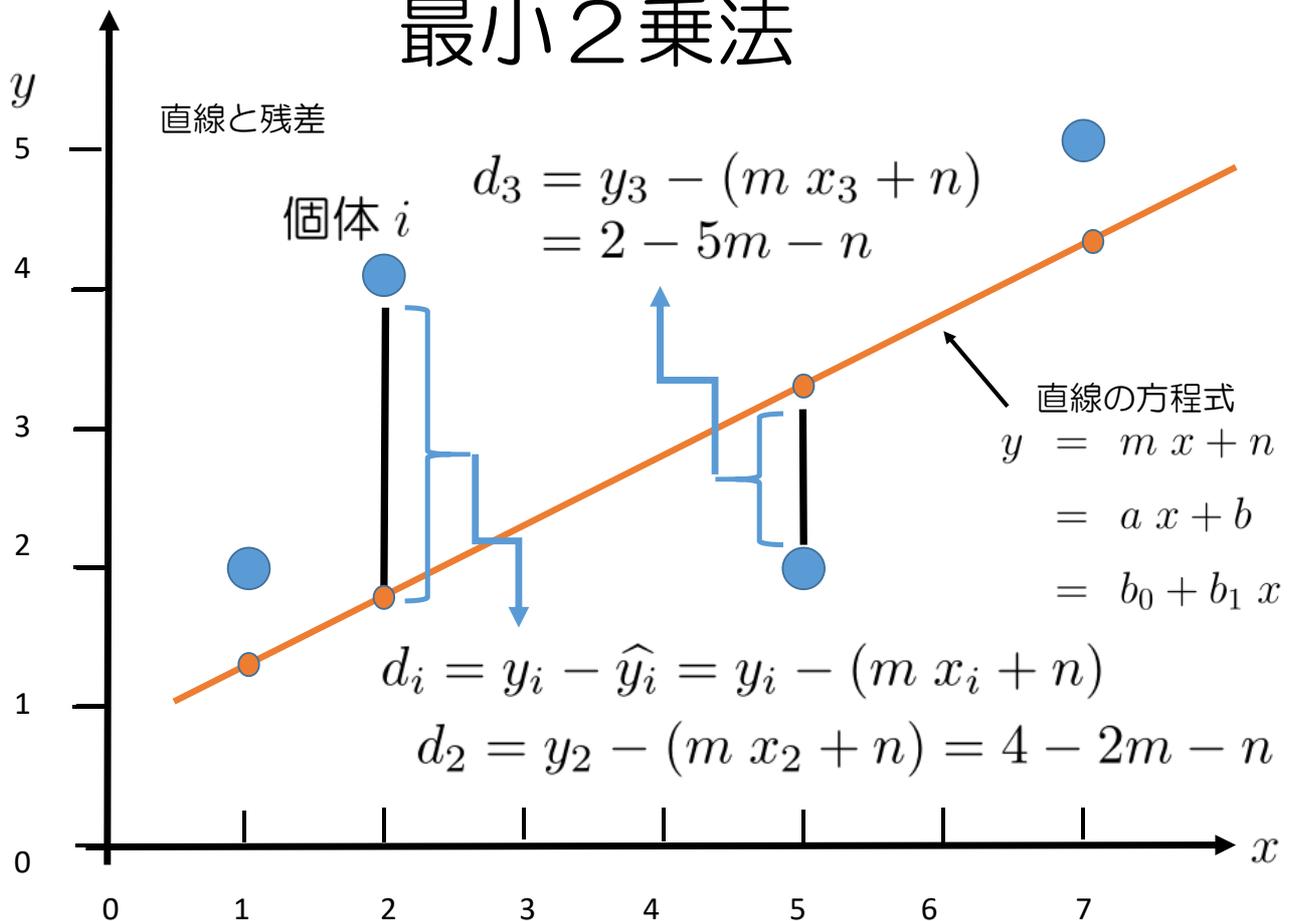
座標系



最小2乗法



最小2乗法



最小2乗法

残差の和

$$\begin{aligned}RS &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \dots \\ &= (y_1 - \hat{y}_1) + (y_2 - \hat{y}_2) + (y_3 - \hat{y}_3) + (y_4 - \hat{y}_4) + \dots \\ &= (y_1 - (m x_1 + n)) + (y_2 - (m x_2 + n)) + \dots\end{aligned}$$

残差 $d_i = y_i - \hat{y}_i$ は正になったり負になったりする。

残差の2乗和

$$\begin{aligned}RSS &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \dots \\ &= (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + (y_3 - \hat{y}_3)^2 + (y_4 - \hat{y}_4)^2 + \dots \\ &= (y_1 - (m x_1 + n))^2 + (y_2 - (m x_2 + n))^2 + \dots \\ &= (2 - (1m + n))^2 + (4 - (2m + n))^2 + (2 - (5m + n))^2 + \dots\end{aligned}$$

9

最小2乗法

- (m, n) の値を変えると RSS の値は変化する。
- RSS は (m, n) の関数である。
- その意味で $RSS(m, n)$ と書ける。
- (m, n) は変数、もしくは引数と呼ばれる。
- RSS は (スカラー値をとる) 2変数の関数である。
- RSS は2乗和 (残差を2乗して足したもの) であるから非負の値である。
- RSS の最小値を与える (m, n) の値を求める。

- 関数の極値ではその微分が 0 となっている。
- RSS の (偏) 微分が 0 となる (m, n) の値を求める。
- RSS を (m, n) で (偏) 微分した (連立) 方程式を解く。

最小2乗法

$$\text{RSS} = (2 - (1m + n))^2 + (4 - (2m + n))^2 + (2 - (5m + n))^2 + (5 - (7m + n))^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} &= \frac{\partial (2 - (1m + n))^2}{\partial m} + \frac{\partial (4 - (2m + n))^2}{\partial m} \\ &\quad + \frac{\partial (2 - (5m + n))^2}{\partial m} + \frac{\partial (5 - (7m + n))^2}{\partial m} \\ &= -2 \times (2 - (1m + n)) \times 1 - 2 \times (4 - (2m + n)) \times 2 \\ &\quad - 2 \times (2 - (5m + n)) \times 5 - 2 \times (5 - (7m + n)) \times 7 \\ &= -2 \times (79m + 15n - 55) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} &= \frac{\partial (2 - (1m + n))^2}{\partial n} + \frac{\partial (4 - (2m + n))^2}{\partial n} + \frac{\partial (2 - (5m + n))^2}{\partial n} + \frac{\partial (5 - (7m + n))^2}{\partial n} \\ &= -2 \times (2 - (1m + n)) - 2 \times (4 - (2m + n)) - 2 \times (2 - (5m + n)) - 2 \times (5 - (7m + n)) \\ &= -2 \times (15m + 4n - 13) = 0\end{aligned}$$

11

最小2乗解

正規方程式

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} = 0$$

$$79m + 15n = 55$$

$$15m + 4n = 13$$

$$m = 0.27, \quad n = 2.22$$

$$\hat{y} = 0.27x + 2.22$$

$$y = \hat{y} + e$$

12

最小2乗解

$$\begin{aligned}\text{RSS} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + n))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial (-\hat{y}_i)}{\partial m} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \times (-x_i) \\ &= -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + n)) \times x_i\end{aligned}$$

13

最小2乗解

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial (-\hat{y}_i)}{\partial n} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \times (y_i - \hat{y}_i) \times (-1) \\ &= -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (m x_i + n))\end{aligned}$$

14

最小2乗解

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial m} = -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) \times x_i = 0$$

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial n} = -2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - (mx_i + n)) = 0$$

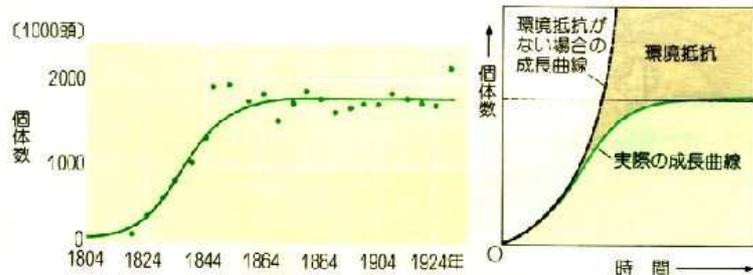
$$79m + 15n = 55$$

$$15m + 4n = 13$$

15

いろいろなモデル

16



(A) タスマニア島(オーストラリア)のヒツジの個体群の成長。各点は5年間の平均頭数を示す。 (B) 実際の成長曲線と環境抵抗がない場合の成長曲線

図6 個体群(密度)の成長曲線

