

第1回 確率変数

授業日程

研究科等名		(参考) 令和3標準 授業日程	人文社会系	教育学
S1 ターム	学期の始期	4月1日(木)	4月1日(木)	4月1日(木)
	授業開始	4月5日(月)	4月5日(月)	4月5日(月)
	授業終了	6月3日(木)	6月2日(水)	6月3日(木)
	学期の終期	6月3日(木)	6月2日(水)	6月3日(木)
S2 ターム	学期の始期	6月4日(金)	6月3日(木)	6月4日(金)
	授業開始	6月4日(金)	6月3日(木)	6月4日(金)
	授業終了	7月22日(木)	7月30日(金)	7月30日(金)
	夏季休業(自)	8月1日(日)	8月1日(日)	8月1日(日)
	夏季休業(至)	9月30日(木)	9月30日(木)	9月30日(木)
	学期の終期	9月30日(木)	9月30日(木)	9月30日(木)

- 1 0408
- 2 0415
- 3 0422
- x 0429
- x 0506
- 4 0513
- 5 0520
- 6 0527
- 7 0603
- 8 0610
- 9 0617
- 10 0624
- 11 0701
- 12 0708
- 13 0715
- 14 0722
- 15 0729

基本情報 / Basic Information	詳細情報 / Detailed Information	授業計画詳細情報 / Class Schedule Details
講義題目 / Subtitle	心理測定のための数学的道具 / Mathematical Tools for Psychometrics	
授業の目標、概要 / Course Objectives / Overview	心理統計学 (psychometrics) の様々な手法を理解・開発するために必要となる数学的道具を学ぶ。	
授業のキーワード / Keywords	日本語用 / Japanese	心理統計学、テスト理論、行列演算、統計計算
	英語用 / English	psychometrics, test theory, matrix operation, statistical computation
授業計画 / Schedule	2020 年度は主に行列演算は添え字演算の基礎と、それらを用いた回帰モデルに関して学んだが、今年度は、それらを発展させた内容を紹介する。具体的には心理統計学でよく用いられる確率分布とそれらを利用した母数の推定方法、ならびにテスト理論の基礎を中心的話題として紹介する。	
授業の方法 / Teaching Methods	講義形式と R を用いた演習並びに討論	
成績評価方法 / Grade Evaluation	数回の課題と学期末のレポート	
教科書 / Textbook	未定	
参考書 / Reference	以下の書籍を用いる可能性がある。 鈴木謙 (2020) 統計的機械学習の数理共立出版	
履修上の注意 / Notes on Taking the Course	以下の文書を一読しておいてほしい。(すべてを理解している必要はない。) http://mayekawa.in.coocan.jp/titech/docs/summation2.pdf http://mayekawa.in.coocan.jp/titech/docs/mat11.pdf また、昨年度の授業の概要は以下に掲示してある。(すべてを理解している必要はない。) 2020 年度の資料 http://mayekawa.in.coocan.jp/u-tokyo/index.html	
関連ホームページ / Course-Related Websites	http://mayekawa.in.coocan.jp/titech/docs/docs.html	
その他 / Others	上記のサイトに載っている文書を適宜利用する可能性がある。	
メールアドレス / e-mail address	mayekawa@nifty.com	

3

R package

- <http://mayekawa.in.coocan.jp/>
 - ◆ <http://mayekawa.in.coocan.jp/Rpackages/Rpackages.html>
 - ◆ http://mayekawa.in.coocan.jp/Rpackages/HTML_help/packages.html

4

確率変数

- 実験結果に数値を当てはめたもの。
- 観測するまでにはその値がわからないが、どのような値が出るかは予想が付くもの。各値の起こりやすさを確率分布として表す。
- 離散化連続か
 - ◆ 離散的確率変数（範囲は整数値で有限 or 可算無限の値を取る）
 - ★ コインの裏表、サイコロの目、成功するまでの試行数
 - ★ X で確率変数を、 $\Pr(x)$ で確率分布を表す。
 - ◆ 連続的確率変数（範囲は実数値で無限の値を取る。）
 - ★ 身長、角度
 - ★ X で確率変数を、 $f(x)$ で確率密度を表す。

5

離散的確率変数

- コインの表裏
 - ◆ $X=1$ (head) or $X=0$ (tail)
 - それ以外の値は取らない == 互いに背反かつ全ての場合を尽くす
 - ★ $\Pr(A) \geq 0$, $\Pr(\text{ALL}) = \Pr(A) + \Pr(\text{not}A) = 1$, $\Pr(\text{NULL}) = 0$
 - ★ 公正なコイン $\rightarrow p=1/2$
 - ◆ $\Pr(X=1) = \Pr(1) = p$, $\Pr(X=0) = \Pr(0) = 1-p$
- サイコロの目
 - ◆ $X=1, 2, 3, 4, 5, 6$
 - ◆ $\Pr(X=1)=p_1$, $\Pr(X=2)=p_2$, ..., $\Pr(X=6)=p_6$
 - ★ $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 = 1$
 - ★ 公正なサイコロ $\rightarrow p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 1/6$
 - ◆ $\Pr(X \leq b) = p_1 + p_2 + \dots + p_b$

6

確率関数の例 2項分布

- 表が出る確率が π のコインを n 回投げたときの表の数

$$f(x|n, \pi) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \times \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

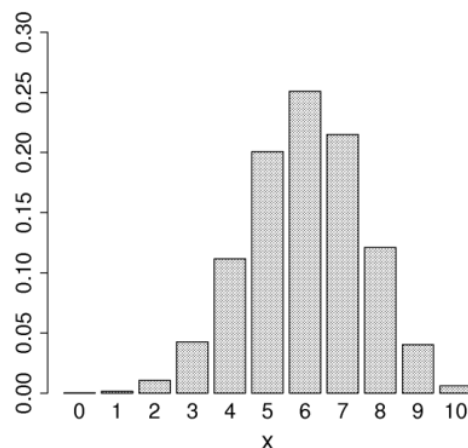


図 2.1: $n = 10, \pi = 0.6$ の二項分布

7

離散的確率分布の性質

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

定義域 $x_0 \leq X \leq x_1$ で定義されている離散型確率変数 X に関しては,

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} f(x) = 1 \quad (2.3)$$

が成り立つ。すなわち、すべての状態における確率を足し合わせると 1 になる。また,

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = \sum_{z=x_0}^x f(z) \quad (2.4)$$

を累積分布関数 (cumulative distribution function, cdf; もしくは単に分布関数) と呼ぶ。このとき,

$$\Pr(a < X \leq b) = \sum_{x=x_0}^b f(x) - \sum_{x=x_0}^a f(x) = F(b) - F(a) \quad (2.5)$$

8

複数の離散的確率変数

X に加え 定義域 $y_0 \leq Y \leq y_1$ で定義されている離散型確率変数 Y があったとすると、同時確率は $f(x, y)$ のように書くが、その総和は 1 に等しい。

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{y=y_0}^{y_1} f(x, y) = 1 \quad (2.7)$$

また、同時確率において、ある変数に関して和を取ると、残りの変数だけにに関する確率関数が得られる。

$$f(x) = \sum_{y=y_0}^{y_1} f(x, y), \quad f(y) = \sum_{x=x_0}^{x_1} f(x, y) \quad (2.8)$$

これを周辺化 (marginalization) と呼び、たとえば $f(x)$ を x に関する周辺確率 (関数) と呼ぶ。

9

同時確率、条件付き確率

条件つき確率は、 $f(x|y)$, $f(y|x)$ のように書き、次のように定義される。

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}, \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \quad (2.9)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} f(x|y) dx = 1, \quad \sum_{y=y_0}^{y_1} f(y|x) = 1 \quad (2.10)$$

したがって、 **$f(x, y) = f(x|y) f(y)$**

また、2 変数 X, Y が独立のとき、同時確率は周辺確率の積になる。すなわち、

$$f(x, y) = f(x) \times f(y) \quad (2.11)$$

が成立する。

10

条件付き確率の例

9種類の確率のコインを 10 回投げた場合 (事前分布は 1/2 付近の確率が大きい)
Binomial Distribution 2 (informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9

A11:10	.00000	.00000	.00001	.00010	.00098	.00605	.02825	.10737	.34868
A10:9	.00000	.00000	.00014	.00157	.00977	.04031	.12106	.26844	.38742
A9:8	.00000	.00007	.00145	.01062	.04395	.12093	.23347	.30199	.19371
A8:7	.00001	.00079	.00900	.04247	.11719	.21499	.26683	.20133	.05740
A7:6	.00014	.00551	.03676	.11148	.20508	.25082	.20012	.08808	.01116
A6:5	.00149	.02642	.10292	.20066	.24609	.20066	.10292	.02642	.00149
A5:4	.01116	.08808	.20012	.25082	.20508	.11148	.03676	.00551	.00014
A4:3	.05740	.20133	.26683	.21499	.11719	.04247	.00900	.00079	.00001
A3:2	.19371	.30199	.23347	.12093	.04395	.01062	.00145	.00007	.00000
A2:1	.38742	.26844	.12106	.04031	.00977	.00157	.00014	.00000	.00000
A1:0	.34868	.10737	.02825	.00605	.00098	.00010	.00001	.00000	.00000

Bm .05455 .09697 .12727 .14545 .15152 .14545 .12727 .09697 .05455

11

同時確率の例

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am

A11:10	.00000	.00000	.00000	.00002	.00015	.00088	.00360	.01041	.01902	.03407
A10:9	.00000	.00000	.00002	.00023	.00148	.00586	.01541	.02603	.02113	.07016
A9:8	.00000	.00001	.00018	.00154	.00666	.01759	.02971	.02928	.01057	.09555
A8:7	.00000	.00008	.00115	.00618	.01776	.03127	.03396	.01952	.00313	.11304
A7:6	.00001	.00053	.00468	.01621	.03107	.03648	.02547	.00854	.00061	.12361
A6:5	.00008	.00256	.01310	.02919	.03729	.02919	.01310	.00256	.00008	.12714
A5:4	.00061	.00854	.02547	.03648	.03107	.01621	.00468	.00053	.00001	.12361
A4:3	.00313	.01952	.03396	.03127	.01776	.00618	.00115	.00008	.00000	.11304
A3:2	.01057	.02928	.02971	.01759	.00666	.00154	.00018	.00001	.00000	.09555
A2:1	.02113	.02603	.01541	.00586	.00148	.00023	.00002	.00000	.00000	.07016
A1:0	.01902	.01041	.00360	.00088	.00015	.00002	.00000	.00000	.00000	.03407
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455	1.0000

12

パーセント（順位）とパーセンタイル

- x のパーセント順位とは $100 \cdot F(x)$ のこと
- 上位何パーセントというときは $100 \cdot (1 - F(x))$ のこと
- パーセンタイルとは 確率 α を与えたときの X の値のこと

$$F^{-1}(\alpha)$$

13

連続的確率変数

- ◆ 円盤に針を付けて回転し、止まった位置の角度を測る。
 - ★ $0 \leq X < 360$ の実数（いくらでも細かく測れる）
 - ★ $\Pr(X=x) = 0$
 - ★ $\Pr(X < b) = F(b)$ 分布関数

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

$$\int_X f(x) dx = 1 \quad \text{確率密度関数}$$

$$\Pr(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

14

複数の連続的確率変数

また、条件つき密度関数 $f(x|y), f(y|x)$ や、同時確率密度関数 $f(x, y)$ は離散量の場合と同じように定義される。同時確率密度関数は、その面積が 1 すなわち

$$\int_Y \int_X f(x, y) dx dy = 1 \quad (2.18)$$

が成り立ち、ある変数に関して積分をしてやると残りの変数だけにに関する確率密度が得られる。

$$f(x) = \int_Y f(x, y) dy \quad f(y) = \int_X f(x, y) dx \quad (2.19)$$

これを周辺化と呼び、 $f(x), f(y)$ を周辺確率密度（関数）と呼ぶ。条件つき密度関数 $f(x|y), f(y|x)$ は同時確率密度を使って、次のように定義される。

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \quad (2.20)$$

$$\int_X f(x|y) dx = 1, \quad \int_Y f(y|x) dy = 1 \quad (2.21)$$

また、2 変数 X, Y が独立のとき、同時確率は周辺確率の積、すなわち

$$f(x, y) = f(x) \times f(y) \quad (2.22)$$

が成り立つ。今までのことから分かるように、確率関数の公式を確率密度関数の公式に書き換えるためには、基本的に和記号を積分に置き換えればよい。

15

積分記号と総和記号

$g(X)$ を確率変数 X の関数とする。
 X の特定の値を

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

とすれば

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g(X)) &= \int_X g(x) f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=1}^n g(x_i) f^*(x_i) \end{aligned}$$

である。ただし

$$f^*(y) = \frac{f(y)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)}$$

である。

また、 x_1, x_2, \dots, x_n が観測されたデータの場合は

$$\mathcal{E}(g(X)) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

であるが、これは $f^*(y) = \frac{1}{n}$ を意味する。

16

その他の性質

- 期待値と分散
- 確率変数の関数として定義される量はまた確率変数になる。
 - ◆ 特に、和や差また定数との四則演算

分布同士の関係

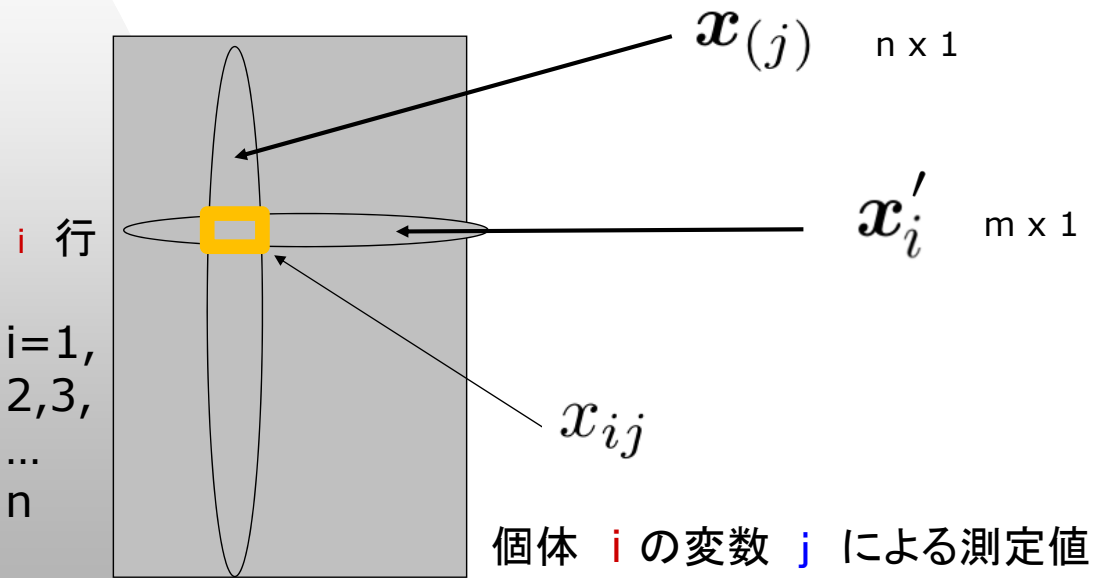
www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html

<http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html>

<http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/BaseImage.png>

多変量データ（データ行列）

j 列 $j=1,2,\dots,m$



古典的テスト理論

$$X = T + E$$

$$\mathcal{E}(E|T) = 0$$

$$\mathcal{E}(X|T) = T$$

$$\sigma_{E|T}^2 \equiv \text{var}(E|T)$$

$$\mathcal{E}(T) = \mu \quad \text{and} \quad \text{var}(T) = \sigma_T^2$$

$$\mathcal{E}(X) = \mu$$

$$\text{var}(X) \equiv \sigma_X^2 = \sigma_T^2 + \sigma_E^2$$

$$\mathcal{E}(\text{var}(X|T)) = \sigma_E^2$$

テスト X の信頼性係数

$$\rho(X) = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2}$$

21

古典的テスト理論

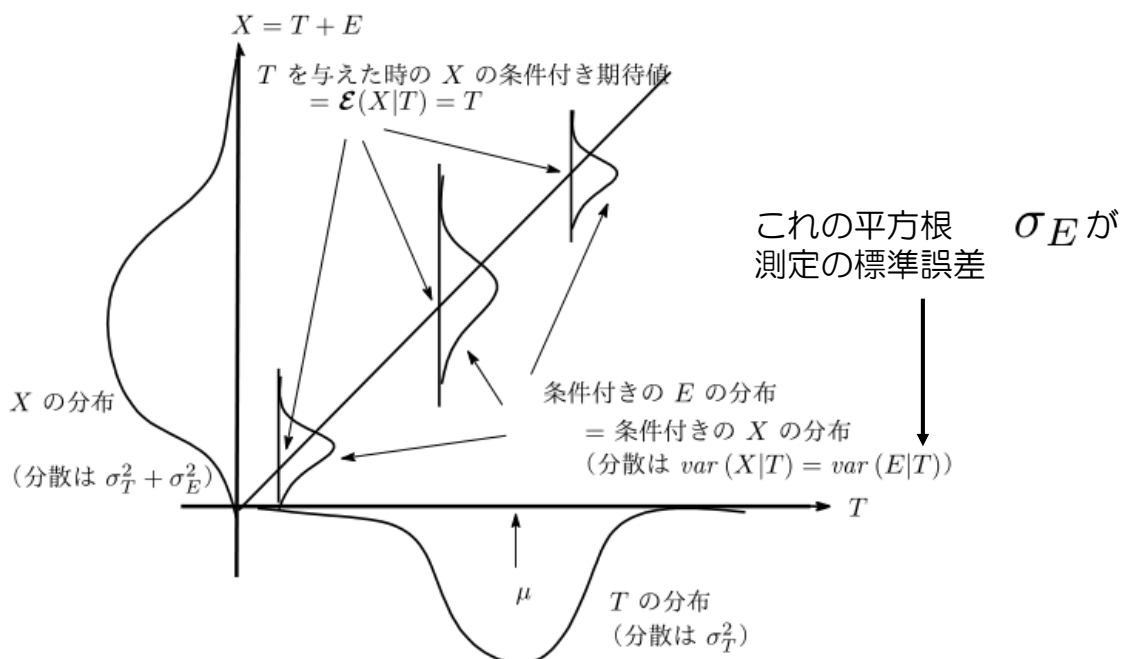


図1 古典的テスト理論

テスト得点の性質

- テスト得点の和や差
 - 項目得点の合計点としてのテスト得点
 - 他のテスト得点との関連
 - テストの信頼性、妥当性
 - 真値の統計的推定
-
- IRT