

1 Thurstone の比較判断の法則

p 個の刺激 $S_i, i = 1, 2, \dots, p$ の持つひとつの特性（例えば美しさ）に関して 1 次元の尺度を作成することを考える。当然であるが、最も簡単な方法は、 p 個の刺激の美しさを評定させればよいが、これではおそらく順序尺度しか得られない。

Thurstone の一対比較法はこのような場合に以下のようなモデルを考える。

各刺激は測定しようとする特性に関して 1 次元尺度を構成しその値を $\xi_i, i = 1, 2, \dots, p$ とする。被験者が S_i と S_j の比較を求められた場合には、それらの尺度値に誤差が加わったものの大小判断の結果を報告するものとする。すなわち、

$$X_i = \xi_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (1)$$

とすれば、 S_i が S_j よりもより多くの特性を持つと判断される ($S_i \succ S_j$) のは

$$X_i \geq X_j \rightarrow S_i \succ S_j \quad (2)$$

の場合である。なお、 ε_i 等は、判断ごとに加わる誤差であり、同じ ε_i でも、各比較判断ごとに独立であるとする。従って、 $S_i \succ S_j$ という比較判断を得る確率は

$$\Pr(S_i \succ S_j) = \Pr(X_i \geq X_j) \quad (3)$$

$$= \Pr(X_i - X_j \geq 0) \quad (4)$$

$$= \Pr(\xi_i + \varepsilon_i - \xi_j - \varepsilon_j \geq 0) \quad (5)$$

となるが、確率変数 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ の分布は

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j \sim N(0, \sigma_{ij}^2), \quad \sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\text{COV}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (6)$$

となるため、

$$\Pr(S_i \succ S_j) = \Pr(X_i \geq X_j) \quad (7)$$

$$= \Pr(\xi_i - \xi_j + \varepsilon_i - \varepsilon_j \geq 0) \quad (8)$$

$$= \Phi\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\sqrt{\sigma_{ij}^2}}\right) \quad (9)$$

で与えられる。この確率を単に π_{ij} と記す。

$o_{ij}, i \neq j$ を S_i と S_j を比較したときに S_i の方が S_j よりも注目した特性を多く持っていた場合（たとえば、より美しい）に 1 となり、そうでない場合に 0 となるようなデータであるとする。このデータを与えられたときのパラメタの尤度は

$$L = \prod_{i>j} \pi_{ij}^{o_{ij}} (1 - \pi_{ij})^{(1-o_{ij})} \quad (10)$$

$$= \prod_{i>j} \Phi\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\sqrt{\sigma_{ij}^2}}\right)^{o_{ij}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\sqrt{\sigma_{ij}^2}}\right)\right)^{(1-o_{ij})} \quad (11)$$

となるが、これを最大にするようにパラメタを求めればよい。なお、 L を最大とすることはその対数をとった対数尤度

$$\ln L = \sum_{i>j} o_{ij} \ln \pi_{ij} + (1 - o_{ij}) \ln(1 - \pi_{ij}) \quad (12)$$

を最大にすることと同値であるため対数尤度を最大とする解を求める方が簡単である。また、データが $S_i \succ S_j$ という判断の度数 f_{ij} 、たとえば、 K 人のデータ $o_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, K$ を用いて

$$f_{ij} = \sum_k o_{ij}^k \quad (13)$$

として与えられている場合には、対数尤度は

$$\ln L = \sum_{i>j} f_{ij} \ln \pi_{ij} + (n_{ij} - f_{ij}) \ln (1 - \pi_{ij}) \quad (14)$$

となる。ただし、 n_{ij} は S_i と S_j の比較の総数である。(この表記は、個人ごとに提示された刺激の対が異なる場合も考慮したものであり、全員がすべての刺激対に答えている場合は $n_{ij} = K$ となる。)

なお、このモデルは間隔尺度の尺度値を定義するため、原点と単位に関して不定性を持つが、通常は、

$$\sum_{i=1}^p \xi_i = 0, \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^p \xi_i^2 = p \quad (15)$$

という制約を付けた解を求めることが多い。また、パラメタの数を減らすために、 $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ を仮定した case III と呼ばれる仮定や、それに加えて

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma^2 \quad (16)$$

を仮定した case V と呼ばれる仮定の下に解を求めることが多い。(この仮定により、Eq.(6) は $\sigma_{ij}^2 = 2\sigma^2$ となる。)

1.1 Case V の解法

データとして得られる反応比率を

$$p_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} f_{ij} \quad (17)$$

とする。Eq.(9) の左辺をこれで置き換える。すなわち、

$$p_{ij} \approx \pi_{ij} = \Phi\left(\frac{\xi_i - \xi_j}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \quad (18)$$

とする。その後、両辺に累積正規分布関数の逆関数を作用させることにより

$$z_{ij} = \Phi^{-1}(p_{ij}) \approx \Phi^{-1}(\pi_{ij}) = \frac{\xi_i - \xi_j}{\sqrt{2\sigma^2}} \quad (19)$$

というパラメタ ξ に関して線形の表現を得る。(なお、この形を、比較判断の法則と呼ぶことがある。)これをたとえば最小 2 乗法を用いて解けばよい。解は

$$\xi_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p z_{ij} \quad (20)$$

となる。ただし、

$$\sum_{i=1}^p \xi_i = 0, \quad \text{and} \quad 2\sigma^2 = 1 \quad (21)$$

という制約を付けている。

1.2 最尤解による解法

Eq.(12) をパラメタで偏微分した連立方程式

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \xi_i} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (23)$$

を数値的に求める。