

0.0.1 逆行列の演算規則といくつかの公式

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})', \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (1)$$

1.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}$
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
4.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}$
  
5.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$
6.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$
7.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$
8.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$
  
9.  $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$
10.  $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}^{-1}$
11.  $\mathbf{D}(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$
12.  $\mathbf{D}(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}^{-1}$

(註)

公式 1-4 は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{A}^{-1}$  と  $\mathbf{B}^{-1}$  で置き換える。

公式 5-8 は  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$  を残す。

公式 9-12 は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{C}$  を  $\mathbf{A}^{-1}$  と  $\mathbf{C}^{-1}$  で置き換える。

公式 1-4 は、たとえば、

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} \quad (2)$$

という形で用いる場合が多い。

公式 5-8 は、 $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$  の様な形の式を単純化するとき利用されることが多い。

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \quad \text{formula5} \quad (3)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} \quad \text{formula6} \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \quad \text{formula7} \quad (5)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} \quad \text{formula8} \quad (6)$$

である。