

# ベイズの定理とベイズ統計学

前川真一

東京工業大学大学院 社会理工学研究科 人間行動システム専攻

031006, 20, 22, 060113, 2006. 5. 15

## 1 確率の基本事項

一つの実験や観察の結果を  $A$  で示す。また、それを様々な観点で分類した結果を  $A_i, i = 1, 2, \dots, a$  で示す。たとえば、壺の中に様々な形、色をもった物体が入っているとして、そこから一つ物体を取り出す。その結果、たとえば、 $A_1$ =赤、 $A_2$ =赤で四角、 $A_3$ =白または四角、等となる。

$A_1$  と  $A_2$  が同時に起こらない場合、すなわち  $A_1 \cup A_2 = \phi$  の場合、 $A_1$  と  $A_2$  は互いに背反と呼ぶ。

分類の仕方に関して、 $\{A_j, j = 1, 2, \dots, a\}$  が、全ての結果を尽くし、かつ互いに排反である場合、それを全事象の分割と呼ぶ。すなわち、分割の場合には、 $A_j$  中の必ずどれかが起こり  $A_j \cap A_k$  は空集合、 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_a$  は全事象となる。

これらの結果が生じる確率、すなわち  $A_i$  が起こる確率を  $\Pr(A = A_i)$  または  $\Pr(A_i)$  と記す。また、 $A_i$  と  $A_j$  が同時に起こる確率、すなわち、実験結果が同時に  $A_i$  と  $A_j$  に分類される場合の確率を  $\Pr(A = A_i \& A = A_j)$  または  $\Pr(A_i \cap A_j)$  または  $\Pr(A_i, A_j)$  と記し、同時確率と呼ぶ。なお、分割の場合、 $\Pr(A_i, A_j) = 0$  である。

全事象の確率は 1 であり、空事象の確率は 0 である。

$\Pr(A_i)$  が与えられた場合、補集合の確率、すなわち  $A_i$  が起こらない確率は以下のようになる。

$$\Pr(A \neq A_i) = \Pr(\overline{A_i}) = 1 - \Pr(A_i) \quad (1)$$

和集合  $A_1 \cup A_2$  の確率、すなわち、 $A_1$  または  $A_2$  (もしくはその両方) が起こる確率 (実験結果が  $A_1$  もしくは  $A_2$  に分類される場合の確率) を  $\Pr(A_1 \cup A_2)$ ,  $\Pr(A = A_1 \text{ or } A = A_2)$  または  $\Pr(A_1 \text{ or } A_2)$  と記す。この場合、

$$\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 \cap A_2) \quad (2)$$

が成立する。

これを 3 つの事象に拡張すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) \\ &\quad - \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3) - \Pr(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \quad (3)$$

$\{B_j, j = 1, 2, \dots, b\}$  を全事象の分割であるとする。この場合、

$$\Pr(B_1 \cup B_2) = \Pr(B_1) + \Pr(B_2) \quad (4)$$

$$\Pr(\cup_j B_j) = \sum_j \Pr(B_j) \quad (5)$$

となる。また、事象  $B_j, j = 1, 2, \dots, b$  は全てを尽くす背反事象であるから、

$$\Pr(B_1 \cup B_2, \dots, \cup B_b) = \sum_j \Pr(B_j) = 1 \quad (6)$$

となる。

ふたつの実験や観察を行い、その結果を分類したものを、 $A_i, i = 1, 2, \dots, a, B_j, j = 1, 2, \dots, b$  とする。このとき、もし、 $A_i$  と  $B_j$  が独立であれば、すなわち、実験  $A$  の結果は実験  $B$  に影響を与えないとすれば、また、その逆も真であるとすれば、

$$\Pr(A_i \cap B_j) = \Pr(A_i)\Pr(B_j) \quad (7)$$

である。この場合、 $\Pr(A_i)$  や  $\Pr(B_j)$  のことを、区別するために、周辺確率と呼ぶ。逆に言えば、同時確率が周辺確率の積で書けるということが、独立性の定義となっている。

$B$  が分割の場合、 $A_i \cap B_j$  と  $A_i \cap B_k$  は互いに背反で、これらの和集合は

$$A_i = \cup_j^b (A_i \cap B_j) \quad (8)$$

となるため、

$$\Pr(A_i) = \sum_j^b \Pr(A_i \cap B_j) \quad (9)$$

$$\text{周辺確率} = \text{同時確率の和} \quad (10)$$

である。

条件付き確率（事象  $B_j$  が起こったときに  $A_i$  が起こる確率）は以下のように定義される。

$$\Pr(A_i|B_j) = \frac{\Pr(A_i \cap B_j)}{\Pr(B_j)} \quad (11)$$

$$= \frac{A_i \text{ と } B_j \text{ の同時確率}}{B_j \text{ の周辺確率}} \quad (12)$$

これより

$$\Pr(A_i \cap B_j) = \Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j) \quad (13)$$

$$\text{同時確率} = \text{条件付き確率} \times \text{周辺確率} \quad (14)$$

また、対称性から

$$\Pr(A_i \cap B_j) = \Pr(B_j|A_i)\Pr(A_i) \quad (15)$$

である。したがって、 $A_i$  と  $B_j$  が独立であれば、 $\Pr(A_i|B_j)=\Pr(A_i)$ 、かつ、 $\Pr(B_j|A_i)=\Pr(B_j)$  となる。

$A_i, i = 1, 2, \dots, a$  が分割の場合、

$$\sum_{i=1}^a \Pr(A_i|B_j) = 1 \quad (16)$$

である。

## 2 ベイズの定理

$A_i$  を与えたときの  $B_j$  の条件付き確率の式を以下のように変形する。

$$\Pr(B_j|A_i) = \frac{\Pr(A_i \cap B_j)}{\Pr(A_i)} \quad (17)$$

$$= \frac{\Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)}{\Pr(A_i)} \quad (18)$$

これをベイズの定理と呼ぶ。なお、上式では、等号の左側と右側で | の左右に現れる事象が逆転している。元々は  $B_j$  を与えたときの確率が解っていたのに、それが逆転している。その意味で事前確率、事後確率と呼ぶことがある。

一般的なベイズの定理

$\{B_j, j = 1, 2, \dots, b\}$  が全事象の分割であるとすれば、Eq.(9) より、

$$\Pr(B_j|A_i) = \frac{\Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)}{\Pr(A_i)} = \frac{\Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)}{\sum_j^b \Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)} \quad (19)$$

である。すなわち、 $\Pr(A_i|B_j)$  と  $\Pr(B_j)$  を知ることにより、 $\Pr(B_j|A_i)$  を計算することが出来る。

最も単純な場合として  $B_j$  が二つしかない場合、すなわち分割が  $B, \bar{B}$  の場合には

$$\Pr(B|A_i) = \frac{\Pr(A_i|B)\Pr(B)}{\Pr(A_i|B)\Pr(B) + \Pr(A_i|\bar{B})\Pr(\bar{B})} \quad (20)$$

$$= \frac{\Pr(A_i|B)\Pr(B)}{\Pr(A_i|B)\Pr(B) + \Pr(A_i|\bar{B})(1 - \Pr(B))} \quad (21)$$

となる。

いずれにしても、Eq.(18) や Eq.(19) は、分母に  $B$  を含まないため、(Eq.(19) の表現は  $B$  を含むように見えるが、それは  $A$  の周辺確率を求めるためのものであり、 $B$  を含むとは考えない。周辺化されている)

**事後確率は同時確率に比例する。**

$$\Pr(B_j|A_i) \propto \Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j), \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (22)$$

ということである。すなわち  $\Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)$  を、 $j = 1, 2, \dots, b$  に関して全て計算し、それらを足して 1 となるように基準化すればよい。

この考え方をより強調するならば、Eq.(19) の要素として現れる確率は、確率そのものではなく、確率に比例するもので良いことになる。すなわち、 $\{B_j, j = 1, 2, \dots, b\}$  が全事象の分割であるとき、

$$\Pr(B_j) = d \times p(B_j) \quad (23)$$

$$\Pr(A_i|B_j) = c_j \times p(A_i|B_j) \quad (24)$$

ただし、

$$d = \frac{1}{\sum_{j=1}^b p(B_j)} \quad \text{and} \quad c_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^a p(A_i|B_j)} \quad (25)$$

となるような関数  $p$  が与えられていれば、Eq.(19) は

$$\Pr(B_j|A_i) = \frac{c_j p(A_i|B_j) p(B_j)}{\sum_{j=1}^b c_j p(A_i|B_j) p(B_j)} \quad (26)$$

と書き表される。

## 2.1 ベイズの定理の解釈

$B$  が原因となり  $A$  が起こるとする。原因は  $B_j, j = 1, 2, \dots, b$  に分類することが可能であり、それぞれの確率は  $\Pr(B_j)$  として既知である。 $B$  の値により、 $A$  の特定の値  $A_i$  の出現確率が変わり、それはモデル確率  $\Pr(A_i|B_j)$  という形で分かっている。この特定の  $B$  の値のことを仮説と呼べば、モデル確率  $\Pr(A_i|B_j)$  は、仮説  $B = B_j$  が真の時に  $A_i$  が起こる条件付き確率となる。

いま、ある実験をして  $A = A_i$  を観察した。ベイズの定理を用いれば、このときに  $B_j$  が原因となった確率を計算することが出来る。すなわち、 $A = A_i$  を観察したときに仮説  $B = B_j$  が真である確率を計算することが出来る。

通常、ベイズの定理は、上記のような状況で使われることが多い。本稿でも、以下では、 $B$  を仮説、 $A$  を実験結果として取り扱う。

## 2.2 計算の仕方

モデル確率（条件付き確率）と  $B_j$  の周辺確率（事前確率）（これが通常は与えられている）

	$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_b$
$A_1$	$\Pr(A_1 B_1)$	$\Pr(A_1 B_2)$	...	$\Pr(A_1 B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)$
$A_2$	$\Pr(A_2 B_1)$	$\Pr(A_2 B_2)$	...	$\Pr(A_2 B_j)$	...	$\Pr(A_2 B_b)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_i$	$\Pr(A_i B_1)$	$\Pr(A_i B_2)$	...	$\Pr(A_i B_j)$	...	$\Pr(A_i B_b)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_a$	$\Pr(A_a B_1)$	$\Pr(A_a B_2)$	...	$\Pr(A_a B_j)$	...	$\Pr(A_a B_b)$
$\Pr(B)$	$\Pr(B_1)$	$\Pr(B_2)$	...	$\Pr(B_j)$	...	$\Pr(B_b)$

$A$  の各行は、必ずしも、背反で全てを尽くす必要はないが、もしも  $A_i$  が分割であれば、

$$\sum_{i=1}^a \Pr(A_i|B_j) = 1 \quad (27)$$

となる。すなわち、この表の各列を行方向（縦）に加えると 1 となる。

また、 $\Pr(B_j|A_i)$  が欲しい場合にはこの表の第  $i$  行のみが必要となる。その場合、注目する  $A_i$  以外の事象を  $\bar{A}_i$  とすれば、 $A_i, \bar{A}_i$  という分割からなる 2 行の表となる。

同時確率と  $A_i$  の周辺確率

	$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_b$	$\Pr(A)$
$A_1$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(B_1)$	$\Pr(A_1 B_2)\Pr(B_2)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_1)$
$A_2$	$\Pr(A_2 B_1)\Pr(B_1)$	$\Pr(A_2 B_2)\Pr(B_2)$	...	$\Pr(A_2 B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_2 B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_i$	$\Pr(A_i B_1)\Pr(B_1)$	$\Pr(A_i B_2)\Pr(B_2)$	...	$\Pr(A_i B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_i B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_a$	$\Pr(A_a B_1)\Pr(B_1)$	$\Pr(A_a B_2)\Pr(B_2)$	...	$\Pr(A_a B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_a B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_a)$
$\Pr(B)$	$\Pr(B_1)$	$\Pr(B_2)$	...	$\Pr(B_j)$	...	$\Pr(B_b)$	

ただし、 $\Pr(A_i) = \sum_j \Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j)$  である。

事後確率

	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_b$	$\Pr(A)$
$A_1$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(B_1)/\Pr(A_1)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(B_j)/\Pr(A_1)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(B_b)/\Pr(A_1)$	$\Pr(A_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_i$	$\Pr(A_i B_1)\Pr(B_1)/\Pr(A_i)$	...	$\Pr(A_i B_j)\Pr(B_j)/\Pr(A_i)$	...	$\Pr(A_i B_b)\Pr(B_b)/\Pr(A_i)$	$\Pr(A_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_a$	$\Pr(A_a B_1)\Pr(B_1)/\Pr(A_a)$	...	$\Pr(A_a B_j)\Pr(B_j)/\Pr(A_a)$	...	$\Pr(A_a B_b)\Pr(B_b)/\Pr(A_a)$	$\Pr(A_a)$
$\Pr(B)$	$\Pr(B_1)$	...	$\Pr(B_j)$	...	$\Pr(B_b)$	

$$\sum_{j=1}^b \Pr(B_j|A_i) = 1 \quad (28)$$

すなわち、事後確率の各行を列方向（左右）に加えると 1 となる。となるが、各行ごとに、各列の確率は同時分布に比例している。すなわち

$$\text{For each } i, \Pr(B_j|A_i) \propto \Pr(A_i|B_j)\Pr(B_j), \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (29)$$

## 2.3 計算例

### 例 1

いま仮にある血液検査を行うと、喫煙者では 90%、非喫煙者では 30%の確率で陽性反応が見られるとする。ではこの検査で陽性となったものが喫煙者である確率はいくらか。ただし、日本人成人の喫煙率は 50%であるとする。また、ある日本人成人女性に対してこの検査を行ったところ陽性であった。この女性が喫煙者である確率はいくらか。ただし、日本人成人女性の喫煙率は 25%であるとする。

### 解答

$A_1$ =検査で陽性、 $A_2$ =検査で陰性、 $B_1$ =喫煙者である、 $B_2$ =喫煙者でない、とする。(単に問題の答えが欲しいのであれば  $A_2$  の行はなくても良い。)  $B$  の周辺確率は  $\Pr(B_1) = 0.5$ ,  $\Pr(B_2) = 0.5$  とする。

#### Smoking

##### Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1	B1:Smoke	B2:NonSmoke
A1:Positive	.90000	.30000
A2:Negative	.10000	.70000
Bm	.50000	.50000

##### Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2	B1:Smoke	B2:NonSmoke	Am
A1:Positive	.45000	.15000	.60000
A2:Negative	.05000	.35000	.40000
Bm	.50000	.50000	1.0000

##### Posterior Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3	B1:Smoke	B2:NonSmoke	Am
A1:Positive	.75000	.25000	.60000
A2:Negative	.12500	.87500	.40000
Bm	.50000	.50000	.

女性の場合は、 $B$  の周辺確率は  $\Pr(B_1) = 0.25$ ,  $\Pr(B_2) = 0.75$  とする。

#### Smoking

##### Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1	B1:Smoke	B2:NonSmoke
A1:Positive	.90000	.30000
A2:Negative	.10000	.70000
Bm	.25000	.75000

##### Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2	B1:Smoke	B2:NonSmoke	Am
A1:Positive	.22500	.22500	.45000
A2:Negative	.02500	.52500	.55000
Bm	.25000	.75000	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B			
PROB3	B1:Smoke	B2:NonSmoke	Am
A1:Positive	.50000	.50000	.45000
A2:Negative	.04545	.95455	.55000
Bm	.25000	.75000	.

例 2

表の出る確率が 1/2 と 2/3 のコインがある。このコインのどちらかを渡され、投げたところ、表が出た。そのコインが、確率 2/3 のコインである確率はいくつか。

解答

$A_1$ =表が出る、 $A_2$ =裏が出る、 $B_1$ =確率が 1/2、 $B_2$ =確率が 2/3 とする。

$B$  の周辺確率は  $\Pr(B_1) = \Pr(B_2) = 1/2$  とする。

Conditional Probability of A given B and Marginal of B			Joint Probability of A and B and marginal of A			Conditional Probability of B given A				
	B1:1/2	B2:2/3		B1:1/2	B2:2/3	Am		B1:1/2	B2:2/3	Am
A1:Head	.50000	.66667	A1:Head	.25000	.33333	.58333	A1:Head	.42857	.57143	.58333
A2:Tail	.50000	.33333	A2:Tail	.25000	.16667	.41667	A2:Tail	.60000	.40000	.41667
Bm	.50000	.50000	Bm	.50000	.50000	1.0000	Bm	.50000	.50000	.

コインを一回投げて表が出たときに、そのコインの表が出る確率が 2/3 である確率は 0.57143 である。また、二つのコインの事後オッズを計算してみると、 $0.57143/(1 - 0.57143) = 1.3333$  である。

例 3

学生の成績を L, M, H の 3 段階で評価するとき、ある 5 点満点のテストの得点分布は、経験的に以下の表の左端に与えた様になることが分かっている。また、L, M, H の成績はそれぞれ、1/4, 1/2, 1/4 の割合で分布することも分かっている。この状況で、テスト得点を観測したときの学生の成績の事後確率を求めよ。

解答

$A_i$ =テスト得点が  $i - 1$  点である、 $B_1=L$ 、 $B_2=M$ 、 $B_3=H$  とする。

$B$  の周辺確率は  $\Pr(B_1) = \Pr(B_3) = 0.25, \Pr(B_2) = .5$  とする。

Conditional Probability of A given B and the Marginal B				Joint Probability of A and B				Conditional Probability of B given A					
PROB1	B1:L	B2:M	B3:H	PROB2	B1:L	B2:M	B3:H	Am	PROB3	B1:L	B2:M	B3:H	Am
A1:0	.10000	.10000	.00000	A1:0	.02500	.05000	.00000	.07500	A1:0	.33333	.66667	.00000	.07500
A2:1	.30000	.10000	.00000	A2:1	.07500	.05000	.00000	.12500	A2:1	.60000	.40000	.00000	.12500
A3:2	.40000	.20000	.10000	A3:2	.10000	.10000	.02500	.22500	A3:2	.44444	.44444	.11111	.22500
A4:3	.20000	.30000	.20000	A4:3	.05000	.15000	.05000	.25000	A4:3	.20000	.60000	.20000	.25000
A5:4	.00000	.20000	.40000	A5:4	.00000	.10000	.10000	.20000	A5:4	.00000	.50000	.50000	.20000
A6:5	.00000	.10000	.30000	A6:5	.00000	.05000	.07500	.12500	A6:5	.00000	.40000	.60000	.12500
Bm	.25000	.50000	.25000	Bm	.25000	.50000	.25000	1.0000	Bm	.25000	.50000	.25000	.

この表から、3 点を取った人は、クラス M に属する確率が 0.6 であることが解る。

### ★3囚人問題

あなたは、処刑が予定されている3人の囚人（A, B, C）のうちの1人、Aである。この3人のうち、明日2人が銃殺され、1名だけは釈放されるという。その1人はすでに決定されているらしいが、それが誰であるかはわからない。ここで以下のような3つの場合を考えてみる。

1) あなた（A）は看守の話を持ち聞きした。「Bと会えるのも今日限りだな。」 「いい奴だったのにな。」看守はウソをつかないものとする。さて、あなたが釈放される確率はいくらだろうか。

2) あなた（A）は看守を買収して言った。「2人銃殺ってことは、私以外の2人のうち、少なくともどちらかは銃殺されるはずですね。銃殺されるのが誰なのか、教えてくださいよ。私については何も教えてくれなくていいですから。」看守は答えた。「Bは銃殺されるよ。」看守はウソをつかないものとする。さて、あなたが釈放される確率はいくらだろうか。

3) あなた（A）はCが看守を買収しているのをたまたま立ち聞きした。「私（C）を除いた2人のうち、少なくともどちらかは銃殺されるはずですね。銃殺されるのが誰なのか教えてくださいよ。私については何も教えてくれなくていいですから。」看守は答えた。「Bは銃殺されるよ。」看守はウソをつかないものとする。さて、あなたが釈放される確率はいくらだろうか。

この問題の解き方であるが、まず、原因となる事象（これまでに記法で  $B$  と記してきたもの）を

$$B_1 = A \text{ が釈放される}, B_2 = B \text{ が釈放される}, B_3 = C \text{ が釈放される}, \quad (30)$$

とする。一人しか釈放されないので、これらは背反で全ての場合を尽くしている。また、事前確率としては、いろいろなものが考えられる。たとえば、第三者から見れば、それぞれが釈放される確率を  $1/3$  としてもおかしくはないが、あなたが悲観的な人であれば、その確率を  $1/5$  とするかもしれない。また、あなたから見て  $B$  が釈放される確率と  $C$  が釈放される確率は必ずしも等しくはない。ただ、いずれにしても、

$$\Pr(A \text{ が釈放される}) + \Pr(B \text{ が釈放される}) + \Pr(C \text{ が釈放される}) = 1 \quad (31)$$

を満たさなければならない。

また、結果となる事象（これまでに記法で  $A$  と記してきたもの）としては、看守が誰が処刑されるという事象とする。

$$A_1 = A \text{ が処刑される}, A_2 = B \text{ が処刑される}, A_3 = C \text{ が処刑される}, \quad (32)$$

これも背反で全てを尽くす事象である。

条件付き確率（モデル確率）に関しては、ケース 1)-3) のそれぞれにおいて、その指定方法が異なってくる。

1) の場合、看守は、A が処刑される時には、「Bに会えるのも今日限り」、「Cに会えるのも今日限り」という発言を五分五分の確率ですと思われる。B や C が釈放される場合にも同様である。

2) の場合、看守は「A が処刑される」とは決して言わない。したがって、B が釈放される場合（すなわち、A と C が処刑される場合）には必ず「C が処刑される」と言い、C が釈放される場合（すなわち、A と B が処刑される場合）には必ず「B が処刑される」と言う。そ



して、A が釈放される場合（すなわち、B と C が処刑される場合）には、B または C のどちらかの名前を五分五分の確率で言うと仮定する。

3) の場合、看守は「A が処刑される」もしくは「B が処刑される」としかいえない。1) との違いは、あなた (A) の名前が出る可能性があることである。

1) の答え（全ての事前確率は 1/3）

Three Prisoners (B or C)				
Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B				
PROB1	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.50000	.50000	
A2:BwillbeExecuted.	.50000	.00000	.50000	
A3:CwillbeExecuted.	.50000	.50000	.00000	
Bm	.33333	.33333	.33333	

  

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B				
PROB2	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	Am
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.16667	.16667	.33333
A2:BwillbeExecuted.	.16667	.00000	.16667	.33333
A3:CwillbeExecuted.	.16667	.16667	.00000	.33333
Bm	.33333	.33333	.33333	1.0000

  

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B				
PROB3	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	Am
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.50000	.50000	.33333
A2:BwillbeExecuted.	.50000	.00000	.50000	.33333
A3:CwillbeExecuted.	.50000	.50000	.00000	.33333
Bm	.33333	.33333	.33333	.

したがって、A が釈放される事後確率は 1/2 に増加している。この 1/2 という値は、全事象 (A または C が釈放される) の確率 1 を、A と B の事前確率に比例して分配したものとなっている。

1) の答え（あなたが、C が釈放される確率が高いと思っている場合）

Three Prisoners (B or C)				
Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B				
PROB1	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.50000	.50000	
A2:BwillbeExecuted.	.50000	.00000	.50000	
A3:CwillbeExecuted.	.50000	.50000	.00000	
Bm	.33333	.11111	.55556	

  

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B				
PROB2	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	Am
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.05556	.27778	.33334
A2:BwillbeExecuted.	.16667	.00000	.27778	.44445
A3:CwillbeExecuted.	.16667	.05556	.00000	.22222
Bm	.33333	.11111	.55556	1.0000

  

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B				
PROB3	B1:freeA	B2:freeB	B3:freeC	Am
A1:AwillbeExecuted.	.00000	.50000	.50000	.33333
A2:BwillbeExecuted.	.50000	.00000	.50000	.33333
A3:CwillbeExecuted.	.50000	.50000	.00000	.33333
Bm	.33333	.33333	.33333	.

A1: A will be Executed.	.00000	.16667	.83333	.33334
A2: B will be Executed.	.37500	.00000	.62500	.44445
A3: C will be Executed.	.75000	.25000	.00000	.22222
Bm	.33333	.11111	.55556	.

この場合、あなたが釈放される事後確率 (0.375) は事前確率 (1/3) から変化しているが、この 0.375 という値は、全事象 (A または C が釈放される) の確率 1 を、A と B の事前確率に比例して分配したものとなっている。なお、条件付き確率の対称性から、C が釈放される確率を低く見積もった場合 (たとえば 11111)、A が釈放される事後確率は 0.75 となる。

2) の答え (全ての事前確率は 1/3) 以下の表では、確率が 0 である事象、看守が「A が処刑される」という、は省いてある。

Three Prisoners (B or C)				
Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B				
PROB1	B1: freeA	B2: freeB	B3: freeC	
A1: B will be Executed.	.50000	.00000	1.0000	
A2: C will be Executed.	.50000	1.0000	.00000	
Bm	.33333	.33333	.33333	

  

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B				
PROB2	B1: freeA	B2: freeB	B3: freeC	Am
A1: B will be Executed.	.16667	.00000	.33333	.50000
A2: C will be Executed.	.16667	.33333	.00000	.50000
Bm	.33333	.33333	.33333	1.0000

  

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B				
PROB3	B1: freeA	B2: freeB	B3: freeC	Am
A1: B will be Executed.	.33333	.00000	.66666	.50000
A2: C will be Executed.	.33333	.66667	.00000	.50000
Bm	.33333	.33333	.33333	.

この場合、あなたが釈放される事後確率 (1/3) は事前確率 (1/3) から変化していない。この条件の場合、B と C の釈放の事前確率が等しければ、A の事前確率と事後確率は常に等しくなる。

2) の答え (あなたが、C が釈放される確率が高いと思っている場合)

```

Three Prisoners (B or C)
Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B
      B1:freeA B2:freeB B3:freeC

A1:BwillbeExecuted.  .50000  .00000  1.0000
A2:CwillbeExecuted.  .50000  1.0000  .00000
Bm                    .33333  .11111  .55556

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B
      B1:freeA B2:freeB B3:freeC   Am

A1:BwillbeExecuted.  .16667  .00000  .55556  .72223
A2:CwillbeExecuted.  .16667  .11111  .00000  .27778
Bm                    .33333  .11111  .55556  1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B
      B1:freeA B2:freeB B3:freeC   Am

A1:BwillbeExecuted.  .23077  .00000  .76923  .72223
A2:CwillbeExecuted.  .60000  .40000  .00000  .27778
Bm                    .33333  .11111  .55556  .

```

この場合、あなたが釈放される事後確率 (0.23077) は事前確率 (1/3) から変化している。なお、条件付き確率の対称性から、C が釈放される確率を低く見積もった場合 (たとえば 0.11111)、A が釈放される事後確率は 0.6 となる。

3) の答え

```

TITLE
Three Prisoners (A or B)
Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B
PROB1      B1:freeA B2:freeB B3:freeC

A1:BwillbeExecuted.  1.0000  .00000  .50000
A2:AwillbeExecuted.  .00000  1.0000  .50000
Bm                    .33333  .33333  .33333

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B
PROB2      B1:freeA B2:freeB B3:freeC   Am

A1:BwillbeExecuted.  .33333  .00000  .16667  .50000
A2:AwillbeExecuted.  .00000  .33333  .16667  .50000
Bm                    .33333  .33333  .33333  1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B
PROB3      B1:freeA B2:freeB B3:freeC   Am

A1:BwillbeExecuted.  .66667  .00000  .33333  .50000
A2:AwillbeExecuted.  .00000  .66667  .33333  .50000
Bm                    .33333  .33333  .33333  .

```

この場合、B と C の釈放の事前確率が等しければ、A の釈放の事前確率が 1/5 よりも大きい場合には、その事後確率は 1/5 よりも大きくなる。

## 2.4 複数の観測値

$A$  を2回観測し、第1回目に  $A_{i_1}, i_1 = 1, 2, \dots, a$ 、第2回目に  $A_{i_2}, i_2 = 1, 2, \dots, a$  を得た場合の推測は以下のように行う。

$$\Pr(B_j|A_{i_1}, A_{i_2}) = \frac{\Pr(A_{i_1}, A_{i_2}|B_j)\Pr(B_j)}{\Pr(A_{i_1}, A_{i_2})} \quad (33)$$

$$\Pr(A_{i_1}, A_{i_2}) = \sum_j \Pr(A_{i_1}, A_{i_2}|B_j)\Pr(B_j) \quad (34)$$

ただし、独立な観測であれば、

$$\Pr(A_{i_1}, A_{i_2}|B_j) = \Pr(A_{i_1}|B_j)\Pr(A_{i_2}|B_j) \quad (35)$$

である。

これは、これまでの議論で、 $A_i$  としていたものを、 $A_{i_1}, A_{i_2}$  で置き換えたものとなっている。

条件付き確率と周辺分布（事前確率）

	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_b$
$A_1, A_1$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(A_1 B_1)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(A_1 B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(A_1 B_b)$
$A_1, A_2$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(A_2 B_1)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(A_2 B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(A_2 B_b)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{i_1}, A_{i_2}$	$\Pr(A_{i_1} B_1)\Pr(A_{i_2} B_1)$	...	$\Pr(A_{i_1} B_j)\Pr(A_{i_2} B_j)$	...	$\Pr(A_{i_1} B_b)\Pr(A_{i_2} B_b)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_a, A_a$	$\Pr(A_a B_1)\Pr(A_a B_1)$	...	$\Pr(A_a B_j)\Pr(A_a B_j)$	...	$\Pr(A_a B_b)\Pr(A_a B_b)$
$\Pr(B)$	$\Pr(B_1)$	...	$\Pr(B_j)$	...	$\Pr(B_b)$

$A_i$  が分割であれば、

$$\sum_{i_1=1}^a \sum_{i_2=1}^a \Pr(A_{i_1}, A_{i_2}|B_j) = 1 \quad (36)$$

となる。 $\Pr(B_j|A_{i_1}, A_{i_2})$  のみが欲しい場合にはこの表の第  $i_1, i_2$  の組み合わせを示す部分のみが必要となる。

同時確率

	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_b$	$\Pr(A, A)$
$A_1, A_1$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(A_1 B_1)\Pr(B_1)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(A_1 B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(A_1 B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_1, A_1)$
$A_1, A_2$	$\Pr(A_1 B_1)\Pr(A_2 B_1)\Pr(B_1)$	...	$\Pr(A_1 B_j)\Pr(A_2 B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_1 B_b)\Pr(A_2 B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_1, A_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{i_1}, A_{i_2}$	$\Pr(A_{i_1} B_1)\Pr(A_{i_2} B_1)\Pr(B_1)$	...	$\Pr(A_{i_1} B_j)\Pr(A_{i_2} B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_{i_1} B_b)\Pr(A_{i_2} B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_{i_1}, A_{i_2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_a, A_a$	$\Pr(A_a B_1)\Pr(A_a B_1)\Pr(B_1)$	...	$\Pr(A_a B_j)\Pr(A_a B_j)\Pr(B_j)$	...	$\Pr(A_a B_b)\Pr(A_a B_b)\Pr(B_b)$	$\Pr(A_a, A_a)$
$\Pr(B)$	$\Pr(B_1)$	...	$\Pr(B_j)$	...	$\Pr(B_b)$	

事後同時確率の表は上記の同時確率の  $(i_1, i_2, j)$  要素を  $\Pr(A_{i_1}, A_{i_2})$  で割ったもの

$$\Pr(B_j|A_{i_1}, A_{i_2}) = \frac{\Pr(A_{i_1}|B_j)\Pr(A_{i_2}|B_j)\Pr(B_j)}{\Pr(A_{i_1}, A_{i_2})} \quad (37)$$

となる。すなわち

$$\Pr(B_j|A_{i_1}, A_{i_2}) \propto \Pr(A_{i_1}|B_j)\Pr(A_{i_2}|B_j)\Pr(B_j) \quad (38)$$

である。

一般的に、独立な観測値を  $n$  回得た場合は、以下のようになる。

$$\Pr(B_j|A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) = \frac{(\prod_{k=1}^n \Pr(A_{ik}|B_j)\Pr(B_j))}{(\prod_{k=1}^n \Pr(A_{ik}|B_j)\Pr(B_j))} \quad (39)$$

$$\propto \left( \prod_{k=1}^n \Pr(A_{ik}|B_j)\Pr(B_j) \right) \Pr(B_j) \quad (40)$$

#### 例 4

先ほどのコイン投げで、コインを 2 回投げた場合には以下のようになる。なお、以下の表では H で表が出ることを、T で裏が出ることを表している。

Conditional Probability of A given B and Marginal of B			Joint Probability of A and B and marginal of A			Conditional Probability of B given A				
	B1:1/2	B2:2/3		B1:1/2	B2:2/3	Am		B1:1/2	B2:2/3	Am
A1:HH	.25000	.44444	A1:HH	.12500	.22222	.34722	A1:HH	.36000	.64000	.34722
A2:HT	.25000	.22222	A2:HT	.12500	.11111	.23611	A2:HT	.52941	.47059	.23611
A3:TH	.25000	.22222	A3:TH	.12500	.11111	.23611	A3:TH	.52941	.47059	.23611
A4:TT	.25000	.11111	A4:TT	.12500	.05556	.18056	A4:TT	.69231	.30769	.18056
Bm	.50000	.50000	Bm	.50000	.50000	1.0000	Bm	.50000	.50000	.

したがって、コインを 2 回投げて両方とも表が出たときに、そのコインの表が出る確率が  $2/3$  である確率は  $0.6400$  である。また、二つのコインの事後オッズを計算してみると、 $0.6400/(1 - 0.6400) = 1.7778 > 1.33333$  となり、一回投げた場合と比べて高くなっている。

なお、上記の結果は、事後確率が、表や裏の出る順序に依存せず、単に表が出た回数にのみ依存していることを示している。(十分統計量)

例5

先ほどのテスト得点の例で、このテストを2回実施した場合に、その得点パターンを与えたときの成績の事後確率を求める。この場合、Aとしては、2回のテスト得点が取りうる全てのパターン（一回目にa点、二回目にb点等）とする。

TITLE												
Test Score (two scores)												
Conditional Probability of A given B (Model)				Joint Probability of A and B and the Marginal					Posterior Probability			
PROB1	B1:L	B2:M	B3:H	PROB2	B1:L	B2:M	B3:H	Am	PROB3	B1:L	B2:M	B3:H
A1:00	.01000	.01000	.00000	A1:00	.00250	.00500	.00000	.00750	A1:00	.33333	.66667	.00000
A2:01	.03000	.01000	.00000	A2:01	.00750	.00500	.00000	.01250	A2:01	.60000	.40000	.00000
A3:02	.04000	.02000	.00000	A3:02	.01000	.01000	.00000	.02000	A3:02	.50000	.50000	.00000
A4:03	.02000	.03000	.00000	A4:03	.00500	.01500	.00000	.02000	A4:03	.25000	.75000	.00000
A5:04	.00000	.02000	.00000	A5:04	.00000	.01000	.00000	.01000	A5:04	.00000	1.0000	.00000
A6:05	.00000	.01000	.00000	A6:05	.00000	.00500	.00000	.00500	A6:05	.00000	1.0000	.00000
A7:10	.03000	.01000	.00000	A7:10	.00750	.00500	.00000	.01250	A7:10	.60000	.40000	.00000
A8:11	.09000	.01000	.00000	A8:11	.02250	.00500	.00000	.02750	A8:11	.81818	.18182	.00000
A9:12	.12000	.02000	.00000	A9:12	.03000	.01000	.00000	.04000	A9:12	.75000	.25000	.00000
A10:13	.06000	.03000	.00000	A10:13	.01500	.01500	.00000	.03000	A10:13	.50000	.50000	.00000
A11:14	.00000	.02000	.00000	A11:14	.00000	.01000	.00000	.01000	A11:14	.00000	1.0000	.00000
A12:15	.00000	.01000	.00000	A12:15	.00000	.00500	.00000	.00500	A12:15	.00000	1.0000	.00000
A13:20	.04000	.02000	.00000	A13:20	.01000	.01000	.00000	.02000	A13:20	.50000	.50000	.00000
A14:21	.12000	.02000	.00000	A14:21	.03000	.01000	.00000	.04000	A14:21	.75000	.25000	.00000
A15:22	.16000	.04000	.01000	A15:22	.04000	.02000	.00250	.06250	A15:22	.64000	.32000	.04000
A16:23	.08000	.06000	.02000	A16:23	.02000	.03000	.00500	.05500	A16:23	.36364	.54545	.09091
A17:24	.00000	.04000	.04000	A17:24	.00000	.02000	.01000	.03000	A17:24	.00000	.66667	.33333
A18:25	.00000	.02000	.03000	A18:25	.00000	.01000	.00750	.01750	A18:25	.00000	.57143	.42857
A19:30	.02000	.03000	.00000	A19:30	.00500	.01500	.00000	.02000	A19:30	.25000	.75000	.00000
A20:31	.06000	.03000	.00000	A20:31	.01500	.01500	.00000	.03000	A20:31	.50000	.50000	.00000
A21:32	.08000	.06000	.02000	A21:32	.02000	.03000	.00500	.05500	A21:32	.36364	.54545	.09091
A22:33	.04000	.09000	.04000	A22:33	.01000	.04500	.01000	.06500	A22:33	.15385	.69231	.15385
A23:34	.00000	.06000	.08000	A23:34	.00000	.03000	.02000	.05000	A23:34	.00000	.60000	.40000
A24:35	.00000	.03000	.06000	A24:35	.00000	.01500	.01500	.03000	A24:35	.00000	.50000	.50000
A25:40	.00000	.02000	.00000	A25:40	.00000	.01000	.00000	.01000	A25:40	.00000	1.0000	.00000
A26:41	.00000	.02000	.00000	A26:41	.00000	.01000	.00000	.01000	A26:41	.00000	1.0000	.00000
A27:42	.00000	.04000	.04000	A27:42	.00000	.02000	.01000	.03000	A27:42	.00000	.66667	.33333
A28:43	.00000	.06000	.08000	A28:43	.00000	.03000	.02000	.05000	A28:43	.00000	.60000	.40000
A29:44	.00000	.04000	.16000	A29:44	.00000	.02000	.04000	.06000	A29:44	.00000	.33333	.66667
A30:45	.00000	.02000	.12000	A30:45	.00000	.01000	.03000	.04000	A30:45	.00000	.25000	.75000
A31:50	.00000	.01000	.00000	A31:50	.00000	.00500	.00000	.00500	A31:50	.00000	1.0000	.00000
A32:51	.00000	.01000	.00000	A32:51	.00000	.00500	.00000	.00500	A32:51	.00000	1.0000	.00000
A33:52	.00000	.02000	.03000	A33:52	.00000	.01000	.00750	.01750	A33:52	.00000	.57143	.42857
A34:53	.00000	.03000	.06000	A34:53	.00000	.01500	.01500	.03000	A34:53	.00000	.50000	.50000
A35:54	.00000	.02000	.12000	A35:54	.00000	.01000	.03000	.04000	A35:54	.00000	.25000	.75000
A36:55	.00000	.01000	.09000	A36:55	.00000	.00500	.02250	.02750	A36:55	.00000	.18182	.81818
Bm	.25000	.50000	.25000	Bm	.25000	.50000	.25000	1.0000	Bm	.25000	.50000	.25000

この例では、たとえ2回のテストの合計点が同じでも、事後確率は変わる場合があることに注意。以下に、2回の合計点が6点となる例を示す。

TITLE												
Test Score (two scores)												
Conditional Probability of A given B (Model)				Joint Probability of A and B and the Marginal					Posterior Probability			
PROB1	B1:L	B2:M	B3:H	PROB2	B1:L	B2:M	B3:H	Am	PROB3	B1:L	B2:M	B3:H
A12:15	.00000	.01000	.00000	A12:15	.00000	.00500	.00000	.00500	A12:15	.00000	1.0000	.00000
A32:51	.00000	.01000	.00000	A32:51	.00000	.00500	.00000	.00500	A32:51	.00000	1.0000	.00000
A17:24	.00000	.04000	.04000	A17:24	.00000	.02000	.01000	.03000	A17:24	.00000	.66667	.33333
A27:42	.00000	.04000	.04000	A27:42	.00000	.02000	.01000	.03000	A27:42	.00000	.66667	.33333
A22:33	.04000	.09000	.04000	A22:33	.01000	.04500	.01000	.06500	A22:33	.15385	.69231	.15385

## 2.5 原因が複数ある場合

### 3 カテゴリに数値が付与されている場合

$B$  が原因で  $A$  が起こる場合、原因となる  $B$  の各カテゴリに数値が付与されている場合がある。たとえば、前節の例 4 の場合、 $B_1$  は生起確率が  $1/2$  の場合、 $B_2$  は  $2/3$  の場合であった。一般に、 $b$  個のカテゴリの値を  $\beta_j, j = 1, 2, \dots, b$  と表す。

また、結果である  $A$  のカテゴリも、それが数値として表される場合、その取るべき値を  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, a$  とする。前節の例 4 においては、表が出る数をその数値とすれば、HT と TH をまとめると、 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$  となる。

結果のカテゴリが数値の場合、条件付き確率を、式で与えることが可能である。たとえば、コイン投げの場合、2 回の試行で確率が変わらず、しかもそれぞれの試行が独立であるとすれば、モデル確率は 2 項分布の確率

$$\Pr(A = \alpha_i | B = \beta_j) = {}_2C_{\alpha_i} \beta_j^{\alpha_i} (1 - \beta_j)^{2 - \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3, \alpha_i = i - 1 \quad (41)$$

として計算することが出来る。なお、 ${}_2C_{\alpha_i}$  の部分は、全ての条件付き確率の和が 1 となるための定数であるため、

$$p(\alpha_i | B = \beta_j) = \beta_j^{\alpha_i} (1 - \beta_j)^{2 - \alpha_i} \quad (42)$$

として

$$\Pr(A = \alpha_i | \beta_j) = \frac{p(\alpha_i | \beta_j)}{\sum_{i=1}^3 p(\alpha_i | \beta_j)} \quad (43)$$

と計算してもよい。

したがって、事後確率は

$$\Pr(B = \beta_j | A = \alpha_i) \propto \Pr(A = \alpha_i | B = \beta_j) \Pr(B = \beta_j) \quad (44)$$

$$\propto p(\alpha_i | \beta_j) \Pr(B = \beta_j) = \beta_j^{\alpha_i} (1 - \beta_j)^{2 - \alpha_i} \Pr(B = \beta_j) \quad (45)$$

となるり、それを確率となるように基準化したものは、

$$\Pr(B = \beta_j | A = \alpha_i) = \frac{\beta_j^{\alpha_i} (1 - \beta_j)^{2 - \alpha_i} \Pr(B = \beta_j)}{\sum_{k=1}^b \beta_k^{\alpha_i} (1 - \beta_k)^{2 - \alpha_i} \Pr(B = \beta_k)} \quad (46)$$

で与えられる。

すなわち、モデル確率の表をわざわざ作り必要が無くなる。

\*\*\*\*\*

例 4 を式を用いて再掲、実はベルヌーイからの複数の観測値

\*\*\*\*\*

#### 3.1 正規分布的なもの

バッテリーには、1.2V と 1.5V の 2 種類しかないとし、電圧計でその電圧を測り、どちらであるかを判定する場合を考える。すなわち、 $B = \beta_1 = 1.2, B = \beta_2 = 1.5$  がバッテリーの種類を表し、 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, a$  が電圧計に表示された数値を表すとする。ただし、この電圧計はデジタル表示で、電圧計の目盛りの細かさを  $0.05V$  とする。



電圧計による測定値は測定誤差を含み、必ずしも真の値とはならないが、平均的には真値の周りに分布し、真値から離れるにしたがって、その確率は減少すると考えられる。したがって、モデル確率としては以下のようなものを考える。

$$\Pr(A = \alpha_i | B = \beta_j) \propto \exp(-\frac{1}{2}(\alpha_i - \beta_j)^2 / 0.05) \quad (47)$$

すなわち、電圧計の目盛りの取りうる範囲に関して

$$c_j = \frac{1}{\sum_k \exp(-\frac{1}{2}(\alpha_k - \beta_j)^2 / 0.05)} \quad (48)$$

を計算し、

$$\Pr(A = \alpha_i | B = \beta_j) = c_j \exp(-\frac{1}{2}(\alpha_i - \beta_j)^2 / 0.05) \quad (49)$$

である。このようにして計算した確率のうち、確率が十分に大きい部分のみを示したものが以下の表である。(なお、以下の表では、確率の和が 0.999 となるが、これは丸め誤差の影響である。)

$\alpha$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$
0.95	0.001	0.000
1.00	0.005	0.000
1.05	0.030	0.000
1.10	0.104	0.000
1.15	0.220	0.000
1.20	0.282	0.000
1.25	0.220	0.001
1.30	0.104	0.005
1.35	0.030	0.030
1.40	0.005	0.104
1.45	0.001	0.220
1.50	0.000	0.282
1.55	0.000	0.220
1.60	0.000	0.104
1.65	0.000	0.030
1.70	0.000	0.005
1.75	0.000	0.001

しかし、この表は実際には必要ではなく、事後確率は

$$\Pr(B = \beta_j | A = \alpha_i) = \frac{c_j \exp(-\frac{1}{2}(\alpha_i - \beta_j)^2 / 0.05) \Pr(B = \beta_j)}{\sum_k c_k \exp(-\frac{1}{2}(\alpha_i - \beta_k)^2 / 0.05) \Pr(B = \beta_k)} \quad (50)$$

として研鑽することが出来る。

したがって、事前分布として、二つの電池の確率が等しいと仮定すれば、このモデルによれば、観測値が 1.30 V 以下であれば 1.2 V の電池、1.40 V 以上であれば、1.5V の電池という判断を下すことになる。1.30 V という観測値を得たときにはどちらであるか五分五分の確率となる。実際には、世の中には 1.5 V の電池の方が多いため、その点を考慮して事前分布を設定する必要がある。(やってみる)

### 3.1.1 複数の観測値

測定を  $n$  回行うとし、その結果を  $A^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n$  と記す。この場合、それぞれの測定値は  $\alpha^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n$  となるが、 $\alpha^{(k)}$  はそれぞれ  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, a$  の値を取るものである。

いま、独立な観測を 2 回行ったとする。その場合、第 1 回目に  $\alpha^{(1)}$  を観測し、第 2 回目に  $\alpha^{(2)}$  を観測したばあい、 $B = b_j$  の下で、 $A^{(1)} = \alpha^{(1)}$  &  $A^{(2)} = \alpha^{(2)}$  という観測値を得る確率は

$$\Pr(A^{(1)} = \alpha^{(1)} \& A^{(2)} = \alpha^{(2)} | B = \beta_j) = \left( c_j \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^{(1)} - \beta_j)^2 / 0.05\right) \right) \times \left( c_j \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^{(2)} - \beta_j)^2 / 0.05\right) \right) \quad (51)$$

である。

一般的に、各測定値が独立であれば、 $n$  回の観測値を得て、第  $k$  回目に  $\alpha^{(k)}$  という測定値を得る確率は

$$\Pr(A^{(k)} = \alpha^{(k)} | B = \beta_j) = c_j \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^{(k)} - \beta_j)^2 / 0.05\right) \quad (52)$$

であるから、全ての同時確率は

$$\Pr(A^{(1)} = \alpha^{(1)} \& A^{(2)} = \alpha^{(2)} \dots, \& A^{(n)} = \alpha^{(n)} | B = \beta_j) = \prod_{k=1}^n c_j \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^{(k)} - \beta_j)^2 / 0.05\right) \quad (53)$$

となる。しかし、

$$\sum_{k=1}^n (\alpha^{(k)} - \beta_j)^2 = n \left( \beta_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)2} (n-1) - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{k' > k} \alpha^{(k)} \alpha^{(k')} \right) \quad (54)$$

の関係を用いると、

$$\Pr(A^{(1)} = \alpha^{(1)} \& A^{(2)} = \alpha^{(2)} \dots, \& A^{(n)} = \alpha^{(n)} | B = \beta_j) = \quad (55)$$

$$\left( c_j \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)} \right)^2 / 0.05 \right] \right)^n \times j \text{ を含まない因子} \quad (56)$$

となる。

したがって、事後確率は、

$$\Pr(B = \beta_j | A^{(1)} = \alpha^{(1)} \& A^{(2)} = \alpha^{(2)} \dots, \& A^{(n)} = \alpha^{(n)}) = \frac{\left( c_j \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)} \right)^2 / 0.05 \right] \right)^n}{\sum_q \left[ \left( c_q \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \beta_q - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)} \right)^2 / 0.05 \right] \right)^n \Pr(B = \beta_q) \right]} \quad (57)$$

となるが、これは、元の観測値、 $A^{(1)} = \alpha^{(1)}$  &  $A^{(2)} = \alpha^{(2)}$  ... , &  $A^{(n)} = \alpha^{(n)}$  から、その平均値  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha^{(k)}$  を計算し、それを元にしてベイズ推定が出来ることを示している。すなわち、

$$\Pr(B = \beta_j | A^{(1)} = \alpha^{(1)} \& A^{(2)} = \alpha^{(2)} \dots, \& A^{(n)} = \alpha^{(n)}) = \Pr(B = \beta_j | \bar{A} = \bar{\alpha}) \quad (58)$$

である。

### 3.2 B の拡張

### 3.3 複数の原因

\*\*\*\*\*  
箱の中に電池が沢山入っている。箱ごとに平均と標準偏差が異なる。  
\*\*\*\*\*

## 4 連続量への拡張

試行の結果に数値を付与する場合、たとえば、 $A_i$  が起こった場合には  $x$  という数値を与えるような場合、 $A = A_i$  という事象を  $X = x$  と記す。

定義域  $x_0 \leq X \leq x_1$  で定義されている離散型確率変数  $X$  に関しては、

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} \Pr(X = x) = 1 \quad (59)$$

$$\Pr(a < X \leq b) = \sum_{x=x_0}^b \Pr(X = x) - \sum_{x=x_0}^a \Pr(X = x) \quad (60)$$

であり、

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = \sum_{z=x_0}^x \Pr(X = z) \quad (61)$$

を（確率）分布関数と呼び

$$\Pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (62)$$

である。

また、確率変数の期待値と分散を

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{x=x_0}^{x_1} x \Pr(X = x) \quad (63)$$

$$\text{var}(X) = \sum_{x=x_0}^{x_1} (x - \mathcal{E}(X))^2 \Pr(X = x) \quad (64)$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_1} x^2 - \mathcal{E}(X)^2 \quad (65)$$

と定義する。

確率変数が連続型（全ての実数を取る）の場合、たとえ区間が限定されていても連続量は無限個存在するため、

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} \Pr(X = x) = 1 \quad (66)$$

を考えることに無理が生じる。すなわち、連続型の確率変数においては、

$$\Pr(X = x) = 0 \quad (67)$$

と定義される、その代わりに、以下のような確率密度関数を定義する。

連続的な確率変数  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  とは、その積分により、 $X$  がある区間に入る確率を与える関数である。

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = 1 \quad (68)$$

$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (69)$$

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz \quad (70)$$

$$\Pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (71)$$

$$\mathcal{E}(X) = \int_{x_0}^{x_1} xf(x)dx \quad (72)$$

$$\text{var}(X) = \int_{x_0}^{x_1} (x - \mathcal{E}(X))^2 f(x)dx \quad (73)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} x^2 f(x)dx - \mathcal{E}(x)^2 \quad (74)$$

また、条件付き密度関数  $f(x|y), f(y|x)$  や、同時密度関数  $f(x, y)$  も同様に定義され、

$$\int_Y \int_X f(x, y)dx dy = 1 \quad (75)$$

$$f(x) = \int_Y f(x, y)dy \quad \text{and} \quad f(y) = \int_X f(x, y)dx \quad (76)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad \text{and} \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \quad (77)$$

$$\int_X f(x|y)dx = 1 \quad \text{and} \quad \int_Y f(y|x)dy = 1 \quad (78)$$

となる。

密度関数に関しては、 $\Pr(X = x) = 0$  であるが、近似的に、 $X$  が  $x$  の近傍に位置する確率は確率密度に比例する

$$\Pr(x - \varepsilon < X \leq x + \varepsilon) \propto f(x) \quad (79)$$

と考えられる。

ベイズの定理を連続量へ拡張するためには、 $A, B$  の代わりに  $X, Y$  を用い、確率の代わりに密度関数を用いて以下の置き換えをする。

$$\Pr(A_i|B_j) = f(x|y) \quad (80)$$

$$\Pr(B_j) = h(y) \quad (81)$$

$$\Pr(A_i, B_j) = f(x, y) = f(x|y)h(y) \quad (82)$$

$$\Pr(A_i) = h(x) = \int_y f(x, y)dy \quad (83)$$

$$\Pr(B_j|A_i) = h(y|x) = f(x, y)/h(x) \quad (84)$$

$$= f(x|y)h(y)/h(x) \quad (85)$$

すなわち、事後密度は同時密度に比例する、

$$h(y|x) \propto f(x, y) = f(x|y)h(y) \quad (86)$$

となる。

通常は、独立な測定を繰り返すため、モデルとして

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n|y) = f(\mathbf{x}|y) = \prod_{i=1}^n f(x_i|y) \quad (87)$$

を用いる。従って事後分布は

$$h(y|x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|y)h(y)/h(\mathbf{x}) \quad (88)$$

$$\propto \prod_{i=1}^n f(x_i|y)h(y) \quad (89)$$

となる。

事後分布の評価は  $h(y|\mathbf{x})$  の平均（事後平均）や分散（事後分散）を用いて行う。

$$\mathcal{E}(Y|\mathbf{x}) = \int_{y_0}^{y_1} yh(y|\mathbf{x})dy \quad (90)$$

$$var(Y|\mathbf{x}) = \int_{y_0}^{y_1} (y - \mathcal{E}(Y|\mathbf{x}))^2 h(y|\mathbf{x})dy \quad (91)$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} y^2 h(y|\mathbf{x})dy - \mathcal{E}(Y|\mathbf{x})^2 \quad (92)$$

事後分布の、中央値や最頻値を用いることもある。グラフを書くことも大切。

## 4.1 2項分布

$$f(x|y) = {}_n C_x y^x (1-y)^{(n-x)} \quad (93)$$

$$h(y) = \frac{1}{\beta(a, b)} y^{(a-1)} (1-y)^{(b-1)} \quad (94)$$

$$\mathcal{E}(y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (95)$$

$$var(y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (96)$$

$$h(y|\mathbf{x}) \propto y^{(x+\alpha-1)} (1-y)^{(n-x+\beta-1)} \quad (97)$$

$$\mathcal{E}(y|x) = \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + n} \quad (98)$$

$$var(y|x) = \frac{(\alpha + x)(\beta + n - x)}{(\alpha + \beta + n)^2(\alpha + \beta + n + 1)} \quad (99)$$

これはベルヌーイ試行を  $n$  回繰り返した場合となる。

## 4.2 正規分布（母分散既知）

$$f(\mathbf{x}|y) \propto \prod \exp(-\frac{1}{2}(x_i - y)^2/\sigma^2) \quad (100)$$

$$\propto \exp(-\frac{1}{2}(\bar{x} - y)^2/(\frac{\sigma^2}{n})) \quad (101)$$

$$h(y) \propto \exp(-\frac{1}{2}(y - \mu)^2/\phi_0^2) \quad (102)$$

$$h(y|\mathbf{x}) \propto \exp(-\frac{1}{2}(y - \theta_1)^2/\phi_1^2) \quad (103)$$

$$\theta_1 = \phi_1^2 \left( \frac{\mu}{\phi_0^2} + \frac{\bar{x}}{\frac{\sigma^2}{n}} \right) \quad (104)$$

$$\phi_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{\phi_0^2} + \frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad (105)$$

なお、この導出には、以下の平方完成

$$ay^2 + by + c = a \left( y + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (106)$$

$$A(x - a)^2 + B(x - b)^2 = (A + B) \left( x - \frac{aA + bB}{A + B} \right)^2 + \frac{AB}{A + B}(a - b)^2 \quad (107)$$

を使う。

$$f(x|y) \times g(y) \propto \exp(-\frac{1}{2}((\bar{x} - y)^2/(\frac{\sigma^2}{n}) + (y - \mu)^2/\phi_0^2)) \quad (108)$$

であるが、指数部分の -2 倍は

$$(\bar{x} - y)^2/(\frac{\sigma^2}{n}) + (y - \mu)^2/\phi_0^2 = \left( 1/(\frac{\sigma^2}{n}) + 1/\phi_0^2 \right) \left( y - \frac{\bar{x} \times (1/\frac{\sigma^2}{n}) + \mu \times (1/\phi_0^2)}{1/(\frac{\sigma^2}{n}) + 1/\phi_0^2} \right)^2 \quad (109)$$

+ $\mu$  を含まない部分 (110)

となる。したがって、正規分布の性質から、 $\mu$  の2次の項の係数の逆数が、事後分布の分散となり、それは

$$\frac{1}{1/(\frac{\sigma^2}{n}) + 1/\phi_0^2} = \frac{1}{\frac{1}{\phi_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \phi_1 \quad (111)$$

と整理される。また、これを用いて、 $\mu$  の事後平均は

$$\frac{\bar{x} \times (1/\frac{\sigma^2}{n}) + \mu \times (1/\phi_0^2)}{1/\frac{\sigma^2}{n} + 1/\phi_0^2} = \phi_1 \times (\bar{x} \times (1/\frac{\sigma^2}{n}) + \mu \times (1/\phi_0^2)) = \theta_1 \quad (112)$$

となる。

9種類の確率のコインを5回投げた場合（事前分布は等確率）

Binomial Distribution 1 (non informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9

A6:5	.00001	.00032	.00243	.01024	.03125	.07776	.16807	.32768	.59049
A5:4	.00045	.00640	.02835	.07680	.15625	.25920	.36015	.40960	.32805
A4:3	.00810	.05120	.13230	.23040	.31250	.34560	.30870	.20480	.07290
A3:2	.07290	.20480	.30870	.34560	.31250	.23040	.13230	.05120	.00810
A2:1	.32805	.40960	.36015	.25920	.15625	.07680	.02835	.00640	.00045
A1:0	.59049	.32768	.16807	.07776	.03125	.01024	.00243	.00032	.00001
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am

A6:5	.00000	.00004	.00027	.00114	.00347	.00864	.01867	.03641	.06561	.13425
A5:4	.00005	.00071	.00315	.00853	.01736	.02880	.04002	.04551	.03645	.18058
A4:3	.00090	.00569	.01470	.02560	.03472	.03840	.03430	.02276	.00810	.18517
A3:2	.00810	.02276	.03430	.03840	.03472	.02560	.01470	.00569	.00090	.18517
A2:1	.03645	.04551	.04002	.02880	.01736	.00853	.00315	.00071	.00005	.18058
A1:0	.06561	.03641	.01867	.00864	.00347	.00114	.00027	.00004	.00000	.13425
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am Bmean Bstd

A6:5	.00001	.00026	.00201	.00848	.02586	.06436	.13910	.27120	.48872	.13425	.80977	.11421
A5:4	.00028	.00394	.01744	.04725	.09614	.15948	.22160	.25202	.20185	.18058	.70711	.15528
A4:3	.00486	.03072	.07939	.13825	.18752	.20738	.18524	.12289	.04374	.18517	.57129	.17482
A3:2	.04374	.12289	.18524	.20738	.18752	.13825	.07939	.03072	.00486	.18517	.42871	.17482
A2:1	.20185	.25202	.22160	.15948	.09614	.04725	.01744	.00394	.00028	.18058	.29289	.15528
A1:0	.48872	.27120	.13910	.06436	.02586	.00848	.00201	.00026	.00001	.13425	.19023	.11421
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.	.	.



9種類の確率のコインを5回投げた場合(事前分布は1/2付近の確率が大きい)

Binomial Distribution 1 (informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9

A6:5	.00001	.00032	.00243	.01024	.03125	.07776	.16807	.32768	.59049
A5:4	.00045	.00640	.02835	.07680	.15625	.25920	.36015	.40960	.32805
A4:3	.00810	.05120	.13230	.23040	.31250	.34560	.30870	.20480	.07290
A3:2	.07290	.20480	.30870	.34560	.31250	.23040	.13230	.05120	.00810
A2:1	.32805	.40960	.36015	.25920	.15625	.07680	.02835	.00640	.00045
A1:0	.59049	.32768	.16807	.07776	.03125	.01024	.00243	.00032	.00001
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am

A6:5	.00000	.00003	.00031	.00149	.00473	.01131	.02139	.03178	.03221	.10325
A5:4	.00002	.00062	.00361	.01117	.02367	.03770	.04584	.03972	.01789	.18025
A4:3	.00044	.00496	.01684	.03351	.04735	.05027	.03929	.01986	.00398	.21650
A3:2	.00398	.01986	.03929	.05027	.04735	.03351	.01684	.00496	.00044	.21650
A2:1	.01789	.03972	.04584	.03770	.02367	.01117	.00361	.00062	.00002	.18025
A1:0	.03221	.03178	.02139	.01131	.00473	.00149	.00031	.00003	.00000	.10325
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am Bmean Bstd

A6:5	.00001	.00030	.00300	.01443	.04586	.10955	.20717	.30775	.31195	.10325	.76736	.12571
A5:4	.00014	.00344	.02002	.06197	.13134	.20916	.25430	.22035	.09927	.18025	.66630	.14857
A4:3	.00204	.02293	.07777	.15479	.21870	.23219	.18147	.09173	.01837	.21650	.55565	.15725
A3:2	.01837	.09173	.18147	.23219	.21870	.15479	.07777	.02293	.00204	.21650	.44435	.15725
A2:1	.09927	.22035	.25430	.20916	.13134	.06197	.02002	.00344	.00014	.18025	.33370	.14857
A1:0	.31195	.30775	.20717	.10955	.04586	.01443	.00300	.00030	.00001	.10325	.23264	.12571
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455	.	.	.

9種類の確率のコインを 10 回投げた場合 (事前分布は等確率)

Binomial Distribution 2 (non informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9

A11:10	.00000	.00000	.00001	.00010	.00098	.00605	.02825	.10737	.34868
A10:9	.00000	.00000	.00014	.00157	.00977	.04031	.12106	.26844	.38742
A9:8	.00000	.00007	.00145	.01062	.04395	.12093	.23347	.30199	.19371
A8:7	.00001	.00079	.00900	.04247	.11719	.21499	.26683	.20133	.05740
A7:6	.00014	.00551	.03676	.11148	.20508	.25082	.20012	.08808	.01116
A6:5	.00149	.02642	.10292	.20066	.24609	.20066	.10292	.02642	.00149
A5:4	.01116	.08808	.20012	.25082	.20508	.11148	.03676	.00551	.00014
A4:3	.05740	.20133	.26683	.21499	.11719	.04247	.00900	.00079	.00001
A3:2	.19371	.30199	.23347	.12093	.04395	.01062	.00145	.00007	.00000
A2:1	.38742	.26844	.12106	.04031	.00977	.00157	.00014	.00000	.00000
A1:0	.34868	.10737	.02825	.00605	.00098	.00010	.00001	.00000	.00000
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am

A11:10	.00000	.00000	.00000	.00001	.00011	.00067	.00314	.01193	.03874	.05460
A10:9	.00000	.00000	.00002	.00017	.00109	.00448	.01345	.02983	.04305	.09208
A9:8	.00000	.00001	.00016	.00118	.00488	.01344	.02594	.03355	.02152	.10069
A8:7	.00000	.00009	.00100	.00472	.01302	.02389	.02965	.02237	.00638	.10111
A7:6	.00002	.00061	.00408	.01239	.02279	.02787	.02224	.00979	.00124	.10102
A6:5	.00017	.00294	.01144	.02230	.02734	.02230	.01144	.00294	.00017	.10101
A5:4	.00124	.00979	.02224	.02787	.02279	.01239	.00408	.00061	.00002	.10102
A4:3	.00638	.02237	.02965	.02389	.01302	.00472	.00100	.00009	.00000	.10111
A3:2	.02152	.03355	.02594	.01344	.00488	.00118	.00016	.00001	.00000	.10069
A2:1	.04305	.02983	.01345	.00448	.00109	.00017	.00002	.00000	.00000	.09208
A1:0	.03874	.01193	.00314	.00067	.00011	.00001	.00000	.00000	.00000	.05460
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am Bmean Bstd

A11:10	.00000	.00000	.00001	.00021	.00199	.01230	.05748	.21849	.70951	.05460	.86205	.06729
A10:9	.00000	.00000	.00017	.00190	.01178	.04864	.14608	.32392	.46750	.09208	.81803	.09573
A9:8	.00000	.00008	.00160	.01172	.04849	.13345	.25764	.33325	.21376	.10069	.74884	.11875
A8:7	.00001	.00086	.00989	.04667	.12878	.23626	.29322	.22124	.06307	.10111	.66696	.13100
A7:6	.00015	.00606	.04043	.12262	.22557	.27589	.22012	.09688	.01228	.10102	.58336	.13679
A6:5	.00164	.02907	.11321	.22073	.27071	.22073	.11321	.02907	.00164	.10101	.50000	.13866
A5:4	.01228	.09688	.22012	.27589	.22557	.12262	.04043	.00606	.00015	.10102	.41664	.13679
A4:3	.06307	.22124	.29322	.23626	.12878	.04667	.00989	.00086	.00001	.10111	.33304	.13100
A3:2	.21376	.33325	.25764	.13345	.04849	.01172	.00160	.00008	.00000	.10069	.25116	.11875
A2:1	.46750	.32392	.14608	.04864	.01178	.00190	.00017	.00000	.00000	.09208	.18197	.09573
A1:0	.70951	.21849	.05748	.01230	.00199	.00021	.00001	.00000	.00000	.05460	.13795	.06729
Bm	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.11111	.	.	.

9種類の確率のコインを 10 回投げた場合 (事前分布は 1/2 付近の確率が大い)

Binomial Distribution 2 (informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9

A11:10	.00000	.00000	.00001	.00010	.00098	.00605	.02825	.10737	.34868
A10:9	.00000	.00000	.00014	.00157	.00977	.04031	.12106	.26844	.38742
A9:8	.00000	.00007	.00145	.01062	.04395	.12093	.23347	.30199	.19371
A8:7	.00001	.00079	.00900	.04247	.11719	.21499	.26683	.20133	.05740
A7:6	.00014	.00551	.03676	.11148	.20508	.25082	.20012	.08808	.01116
A6:5	.00149	.02642	.10292	.20066	.24609	.20066	.10292	.02642	.00149
A5:4	.01116	.08808	.20012	.25082	.20508	.11148	.03676	.00551	.00014
A4:3	.05740	.20133	.26683	.21499	.11719	.04247	.00900	.00079	.00001
A3:2	.19371	.30199	.23347	.12093	.04395	.01062	.00145	.00007	.00000
A2:1	.38742	.26844	.12106	.04031	.00977	.00157	.00014	.00000	.00000
A1:0	.34868	.10737	.02825	.00605	.00098	.00010	.00001	.00000	.00000
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am

A11:10	.00000	.00000	.00000	.00002	.00015	.00088	.00360	.01041	.01902	.03407
A10:9	.00000	.00000	.00002	.00023	.00148	.00586	.01541	.02603	.02113	.07016
A9:8	.00000	.00001	.00018	.00154	.00666	.01759	.02971	.02928	.01057	.09555
A8:7	.00000	.00008	.00115	.00618	.01776	.03127	.03396	.01952	.00313	.11304
A7:6	.00001	.00053	.00468	.01621	.03107	.03648	.02547	.00854	.00061	.12361
A6:5	.00008	.00256	.01310	.02919	.03729	.02919	.01310	.00256	.00008	.12714
A5:4	.00061	.00854	.02547	.03648	.03107	.01621	.00468	.00053	.00001	.12361
A4:3	.00313	.01952	.03396	.03127	.01776	.00618	.00115	.00008	.00000	.11304
A3:2	.01057	.02928	.02971	.01759	.00666	.00154	.00018	.00001	.00000	.09555
A2:1	.02113	.02603	.01541	.00586	.00148	.00023	.00002	.00000	.00000	.07016
A1:0	.01902	.01041	.00360	.00088	.00015	.00002	.00000	.00000	.00000	.03407
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:0.1 B2:0.2 B3:0.3 B4:0.4 B5:0.5 B6:0.6 B7:0.7 B8:0.8 B9:0.9 Am Bmean Bstd

A11:10	.00000	.00000	.00002	.00045	.00434	.02582	.10552	.30561	.55824	.03407	.83862	.08153
A10:9	.00000	.00001	.00025	.00326	.02109	.08357	.21961	.37101	.30120	.07016	.78368	.10377
A9:8	.00000	.00007	.00193	.01616	.06969	.18410	.31099	.30648	.11058	.09555	.71476	.11696
A8:7	.00000	.00067	.01014	.05465	.15707	.27664	.30042	.17271	.02770	.11304	.64294	.12385
A7:6	.00006	.00432	.03785	.13118	.25138	.29515	.20605	.06910	.00492	.12361	.57142	.12776
A6:5	.00064	.02015	.10302	.22955	.29326	.22955	.10302	.02015	.00064	.12714	.50000	.12909
A5:4	.00492	.06910	.20605	.29515	.25138	.13118	.03785	.00432	.00006	.12361	.42858	.12776
A4:3	.02770	.17271	.30042	.27664	.15707	.05465	.01014	.00067	.00000	.11304	.35706	.12385
A3:2	.11058	.30648	.31099	.18410	.06969	.01616	.00193	.00007	.00000	.09555	.28524	.11696
A2:1	.30120	.37101	.21961	.08357	.02109	.00326	.00025	.00001	.00000	.07016	.21632	.10377
A1:0	.55824	.30561	.10552	.02582	.00434	.00045	.00002	.00000	.00000	.03407	.16138	.08153
Bm	.05455	.09697	.12727	.14545	.15152	.14545	.12727	.09697	.05455	.	.	.

5 点満点のテストの得点分布：真値を与えたときに正規分布（事前確率は等確率）

Normal Distribution 1 (non informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0

A6:5	.00445	.01756	.05425	.13195	.25702
A5:4	.05425	.12975	.24311	.35868	.42376
A4:3	.24311	.35269	.40083	.35868	.25702
A3:2	.40083	.35269	.24311	.13195	.05735
A2:1	.24311	.12975	.05425	.01786	.00471
A1:0	.05425	.01756	.00445	.00089	.00014
Bm	.20000	.20000	.20000	.20000	.20000

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0 Am

A6:5	.00089	.00351	.01085	.02639	.05140	.09305
A5:4	.01085	.02595	.04862	.07174	.08475	.24191
A4:3	.04862	.07054	.08017	.07174	.05140	.32247
A3:2	.08017	.07054	.04862	.02639	.01147	.23719
A2:1	.04862	.02595	.01085	.00357	.00094	.08993
A1:0	.01085	.00351	.00089	.00018	.00003	.01546
Bm	.20000	.20000	.20000	.20000	.20000	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0 Am Bmean Bstd

A6:5	.00957	.03774	.11660	.28362	.55246	.09305	3.6658	.44614
A5:4	.04485	.10727	.20100	.29654	.35035	.24191	3.4001	.57969
A4:3	.15078	.21875	.24860	.22246	.15941	.32247	3.0105	.64837
A3:2	.33798	.29740	.20500	.11126	.04836	.23719	2.6173	.58485
A2:1	.54065	.28854	.12063	.03971	.01047	.08993	2.3454	.45243
A1:0	.70185	.22719	.05761	.01150	.00184	.01546	2.1921	.33276
Bm	.20000	.20000	.20000	.20000	.20000	.	.	.

5 点満点のテストの得点分布：真値を与えたときに正規分布（事前確率は中央が高確率）

Normal Distribution 1 (informative prior)

Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B

PROB1 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0

A6:5	.00445	.01756	.05425	.13195	.25702
A5:4	.05425	.12975	.24311	.35868	.42376
A4:3	.24311	.35269	.40083	.35868	.25702
A3:2	.40083	.35269	.24311	.13195	.05735
A2:1	.24311	.12975	.05425	.01786	.00471
A1:0	.05425	.01756	.00445	.00089	.00014
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B

PROB2 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0 Am

A6:5	.00050	.00415	.01647	.03120	.02871	.08103
A5:4	.00606	.03068	.07382	.08482	.04734	.24271
A4:3	.02716	.08340	.12171	.08482	.02871	.34580
A3:2	.04477	.08340	.07382	.03120	.00641	.23961
A2:1	.02716	.03068	.01647	.00422	.00053	.07906
A1:0	.00606	.00415	.00135	.00021	.00002	.01179
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B

PROB3 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0 Am Bmean Bstd

A6:5	.00614	.05124	.20326	.38506	.35430	.08103	3.5151	.45190
A5:4	.02497	.12641	.30414	.34946	.19502	.24271	3.2816	.50958
A4:3	.07853	.24119	.35196	.24528	.08303	.34580	3.0065	.53211
A3:2	.18686	.34809	.30809	.13023	.02674	.23961	2.7309	.51067
A2:1	.34350	.38809	.20834	.05341	.00665	.07906	2.4958	.45423
A1:0	.51395	.35220	.11468	.01783	.00135	.01179	2.3202	.38170
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170	.	.	.

3 点（正答率 = 60%）の場合の事後平均 = 3.0065, 事後標準偏差 = .53211

5 点満点のテストを2回実施：真値を与えたときに正規分布（事前確率は中央が大）  
 Conditional Probability of A given B (Model) and the Marginal B  
 PROB1 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0

A36:55	.00002	.00031	.00294	.01741	.06606
A35:54	.00024	.00228	.01319	.04733	.10891
A34:53	.00108	.00619	.02174	.04733	.06606
A33:52	.00178	.00619	.01319	.01741	.01474
A32:51	.00108	.00228	.00294	.00236	.00121
A31:50	.00024	.00031	.00024	.00012	.00004
A30:45	.00024	.00228	.01319	.04733	.10891
A29:44	.00294	.01683	.05910	.12865	.17957
A28:43	.01319	.04576	.09745	.12865	.10891
A27:42	.02174	.04576	.05910	.04733	.02430
A26:41	.01319	.01683	.01319	.00641	.00199
A25:40	.00294	.00228	.00108	.00032	.00006
A24:35	.00108	.00619	.02174	.04733	.06606
A23:34	.01319	.04576	.09745	.12865	.10891
A22:33	.05910	.12439	.16066	.12865	.06606
A21:32	.09745	.12439	.09745	.04733	.01474
A20:31	.05910	.04576	.02174	.00641	.00121
A19:30	.01319	.00619	.00178	.00032	.00004
A18:25	.00178	.00619	.01319	.01741	.01474
A17:24	.02174	.04576	.05910	.04733	.02430
A16:23	.09745	.12439	.09745	.04733	.01474
A15:22	.16066	.12439	.05910	.01741	.00329
A14:21	.09745	.04576	.01319	.00236	.00027
A13:20	.02174	.00619	.00108	.00012	.00001
A12:15	.00108	.00228	.00294	.00236	.00121
A11:14	.01319	.01683	.01319	.00641	.00199
A10:13	.05910	.04576	.02174	.00641	.00121
A9:12	.09745	.04576	.01319	.00236	.00027
A8:11	.05910	.01683	.00294	.00032	.00002
A7:10	.01319	.00228	.00024	.00002	.00000
A6:05	.00024	.00031	.00024	.00012	.00004
A5:04	.00294	.00228	.00108	.00032	.00006
A4:03	.01319	.00619	.00178	.00032	.00004
A3:02	.02174	.00619	.00108	.00012	.00001
A2:01	.01319	.00228	.00024	.00002	.00000
A1:00	.00294	.00031	.00002	.00000	.00000
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170

Joint Probability of A and B and the Marginal A and B  
 PROB2 B1:2.0 B2:2.5 B3:3.0 B4:3.5 B5:4.0 Am

A36:55	.00000	.00007	.00089	.00412	.00738	.01247
A35:54	.00003	.00054	.00400	.01119	.01217	.02793
A34:53	.00012	.00146	.00660	.01119	.00738	.02676
A33:52	.00020	.00146	.00400	.00412	.00165	.01143
A32:51	.00012	.00054	.00089	.00056	.00014	.00225
A31:50	.00003	.00007	.00007	.00003	.00000	.00021
A30:45	.00003	.00054	.00400	.01119	.01217	.02793
A29:44	.00033	.00398	.01795	.03042	.02006	.07274
A28:43	.00147	.01082	.02959	.03042	.01217	.08447
A27:42	.00243	.01082	.01795	.01119	.00271	.04510
A26:41	.00147	.00398	.00400	.00151	.00022	.01120
A25:40	.00033	.00054	.00033	.00008	.00001	.00128
A24:35	.00012	.00146	.00660	.01119	.00738	.02676
A23:34	.00147	.01082	.02959	.03042	.01217	.08447
A22:33	.00660	.02942	.04878	.03042	.00738	.12260
A21:32	.01089	.02942	.02959	.01119	.00165	.08273
A20:31	.00660	.01082	.00660	.00151	.00014	.02568
A19:30	.00147	.00146	.00054	.00008	.00000	.00356
A18:25	.00020	.00146	.00400	.00412	.00165	.01143
A17:24	.00243	.01082	.01795	.01119	.00271	.04510
A16:23	.01089	.02942	.02959	.01119	.00165	.08273
A15:22	.01795	.02942	.01795	.00412	.00037	.06979
A14:21	.01089	.01082	.00400	.00056	.00003	.02630
A13:20	.00243	.00146	.00033	.00003	.00000	.00425
A12:15	.00012	.00054	.00089	.00056	.00014	.00225
A11:14	.00147	.00398	.00400	.00151	.00022	.01120
A10:13	.00660	.01082	.00660	.00151	.00014	.02568
A9:12	.01089	.01082	.00400	.00056	.00003	.02630
A8:11	.00660	.00398	.00089	.00008	.00000	.01155
A7:10	.00147	.00054	.00007	.00000	.00000	.00209
A6:05	.00003	.00007	.00007	.00003	.00000	.00021
A5:04	.00033	.00054	.00033	.00008	.00001	.00128
A4:03	.00147	.00146	.00054	.00008	.00000	.00356
A3:02	.00243	.00146	.00033	.00003	.00000	.00425
A2:01	.00147	.00054	.00007	.00000	.00000	.00209
A1:00	.00033	.00007	.00001	.00000	.00000	.00041
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170	1.0000

Conditional Probability of B given A and the Marginal A and B (informative prior)

PROB3	B1:2.0	B2:2.5	B3:3.0	B4:3.5	B5:4.0	Am	Bmean	Bstd
A36:55	.00018	.00585	.07168	.33030	.59199	.01247	3.7540	.32807
A35:54	.00097	.01929	.14338	.40074	.43562	.02793	3.6254	.38794
A34:53	.00452	.05473	.24673	.41825	.27577	.02676	3.4530	.43968
A33:52	.01744	.12811	.35028	.36015	.14403	.01143	3.2426	.47399
A32:51	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.00225	3.0104	.48574
A31:50	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.00021	2.7782	.47433
A30:45	.00097	.01929	.14338	.40074	.43562	.02793	3.6254	.38794
A29:44	.00452	.05473	.24673	.41825	.27577	.07274	3.4530	.43968
A28:43	.01744	.12811	.35028	.36015	.14403	.08447	3.2426	.47399
A27:42	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.04510	3.0104	.48574
A26:41	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.01120	2.7782	.47433
A25:40	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.00128	2.5669	.44151
A24:35	.00452	.05473	.24673	.41825	.27577	.02676	3.4530	.43968
A23:34	.01744	.12811	.35028	.36015	.14403	.08447	3.2426	.47399
A22:33	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.12260	3.0104	.48574
A21:32	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.08273	2.7782	.47433
A20:31	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.02568	2.5669	.44151
A19:30	.41391	.41149	.15227	.02119	.00115	.00356	2.3921	.39200
A18:25	.01744	.12811	.35028	.36015	.14403	.01143	3.2426	.47399
A17:24	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.04510	3.0104	.48574
A16:23	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.08273	2.7782	.47433
A15:22	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.06979	2.5669	.44151
A14:21	.41391	.41149	.15227	.02119	.00115	.02630	2.3921	.39200
A13:20	.57139	.34454	.07733	.00653	.00021	.00425	2.2598	.33392
A12:15	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.00225	3.0104	.48574
A11:14	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.01120	2.7782	.47433
A10:13	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.02568	2.5669	.44151
A9:12	.41391	.41149	.15227	.02119	.00115	.02630	2.3921	.39200
A8:11	.57139	.34454	.07733	.00653	.00021	.01155	2.2598	.33392
A7:10	.70516	.25790	.03511	.00180	.00004	.00209	2.1668	.27557
A6:05	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.00021	2.7782	.47433
A5:04	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.00128	2.5669	.44151
A4:03	.41391	.41149	.15227	.02119	.00115	.00356	2.3921	.39200
A3:02	.57139	.34454	.07733	.00653	.00021	.00425	2.2598	.33392
A2:01	.70516	.25790	.03511	.00180	.00004	.00209	2.1668	.27557
A1:00	.80599	.17879	.01476	.00046	.00001	.00041	2.1049	.22253
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170	.	.	.

Sufficient Stat = SUM

PROB3	B1:2.0	B2:2.5	B3:3.0	B4:3.5	B5:4.0	Am	Bmean	Bstd
10:55	.00018	.00585	.07168	.33030	.59199	.01247	3.7540	.32807
9:54,45	.00097	.01929	.14338	.40074	.43562	.02793	3.6254	.38794
8:53,35,44	.00452	.05473	.24673	.41825	.27577	.02676	3.4530	.43968
7:52,25,34,34	.01744	.12811	.35028	.36015	.14403	.01143	3.2426	.47399
6:51,15,42,24,33	.05385	.23993	.39790	.24814	.06019	.00225	3.0104	.48574
5:50,05,41,14,32,23	.13158	.35557	.35766	.13528	.01990	.01120	2.7782	.47433
4:40,04,31,13,22	.25714	.42147	.25714	.05899	.00526	.02568	2.5669	.44151
3:30,03,21,12	.41391	.41149	.15227	.02119	.00115	.02630	2.3921	.39200
2:20,02,11	.57139	.34454	.07733	.00653	.00021	.01155	2.2598	.33392
1:10,01	.70516	.25790	.03511	.00180	.00004	.00209	2.1668	.27557
0:00	.80599	.17879	.01476	.00046	.00001	.00041	2.1049	.22253
Bm	.11170	.23648	.30364	.23648	.11170	.	.	.

6 点 (正答率 = 60 %) の場合の事後平均 = 3.0104, 事後標準偏差 = .48574