

# 心理・教育測定法 基礎編 B

## 多変量解析入門

---

多次元尺度法による個体の分類

# 2017年度 心理・教育測定基礎編 A・B 心理・教育測定演習 A・B

心理・教育測定法(基礎編) A・B  
木曜日 7-8限:W607

担当 前川

人間行動システム統計演習A・B  
木曜日 9-10限 W607

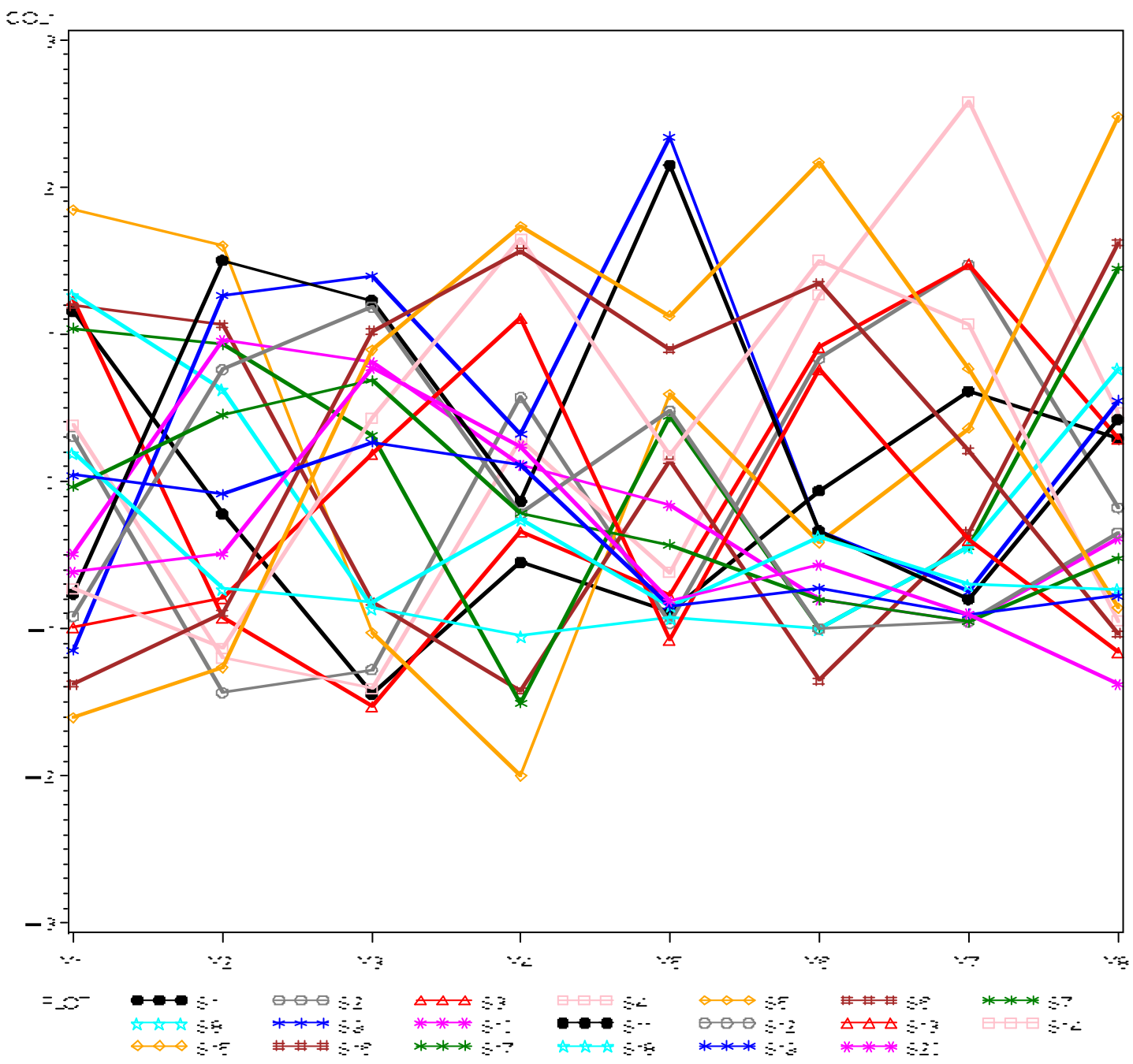
担当 前川  
栗山

4月 6日	オリエンテーション	前川	1	オリエンテーション	
4月13日	統計量の計算・相関と回帰		2	データフレームの操作	
4月20日	統計的推測の基礎		3	ヒストグラム、クロス集計	
4月27日	一つの母平均に関する推測		4	相関と回帰	
5月11日	二つの母平均に関する推測		5	平均値に関する推測	
5月18日	複数の母平均に関する推測		6	分散分析1	
5月25日	分散分析法と回帰分析		7	分散分析2	
6月 1日	まとめ		8	まとめ	
6月15日	イントロ		1	イントロ	
6月22日	多次元尺度法による個体の分類		2	多次元尺度法	
6月29日	クラスター分析による個体の分類		3	クラスター分析	栗山
7月 6日	回帰分析		4	回帰分析	
7月13日	因子分析		5	因子分析	
7月21日	共分散分析と構造方程式モデル	栗山	6	共分散分析と構造方程式モデル	栗山
7月27日	その他の方法		7	その他の方法	
8月 4日	まとめ		8	まとめ	

# データ

OBS	NAME	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
1	S1	0.3	2.9	-0.3	1.4	7.2	3.6	0.2	3.5	0.5	3.3	3.1	3.9
2	S2	-1.0	2.1	0.4	1.6	5.0	0.0	0.6	6.2	0.3	5.6	4.8	2.8
3	S3	-0.5	2.9	0.6	2.0	7.4	1.5	0.0	4.0	0.8	5.8	4.8	3.9
4	S4	-1.0	2.8	1.0	2.9	5.2	0.7	0.3	5.5	1.2	6.7	7.0	4.3
5	S5	3.0	3.0	0.6	3.0	9.0	9.0	1.2	0.0	4.4	2.4	2.6	9.0
6	S6	2.6	2.2	-0.4	1.8	7.3	7.4	1.7	1.4	3.2	0.0	1.2	7.0
7	S7	2.8	2.2	0.1	1.6	6.9	7.0	4.4	1.2	4.0	0.9	1.0	6.6
8	S8	2.0	2.3	-1.0	1.1	7.5	6.1	1.6	2.3	0.4	0.9	1.0	5.0
9	S9	2.9	-1.0	2.1	0.7	1.2	8.0	7.0	5.6	9.0	2.6	0.4	4.5
10	S10	1.9	-0.1	-0.3	-0.2	2.9	7.1	5.6	5.1	2.4	1.4	0.0	2.3
11	S11	2.9	-0.6	1.9	0.5	2.2	8.7	6.6	4.5	8.5	2.6	0.3	4.2
12	S12	2.1	-0.4	0.1	-0.2	1.8	6.5	6.5	4.3	4.1	0.9	0.0	2.4
13	S13	-0.5	0.2	0.2	-0.5	1.6	1.9	4.1	7.5	0.0	5.4	1.1	0.5
14	S14	-1.0	-0.2	1.8	0.7	2.3	0.9	4.7	8.8	3.3	7.3	4.0	1.0
15	S15	-1.0	-1.0	3.0	0.6	0.0	0.5	5.8	9.0	5.8	9.0	3.4	1.2
16	S16	-0.3	-1.0	2.2	0.0	0.6	1.6	6.1	8.6	5.2	6.9	2.3	0.8
17	S17	1.3	0.7	-0.5	-0.3	4.1	5.6	5.3	4.3	1.7	1.4	0.0	2.0
18	S18	0.7	1.5	-0.5	-0.3	4.7	2.1	1.7	4.2	0.6	2.5	0.5	1.5
19	S19	0.5	0.9	-0.7	-0.5	4.3	4.0	4.3	5.1	0.6	1.6	0.1	1.4
20	S20	0.7	0.1	-0.6	-1.0	2.6	2.8	5.5	5.4	0.7	2.0	0.1	0.0

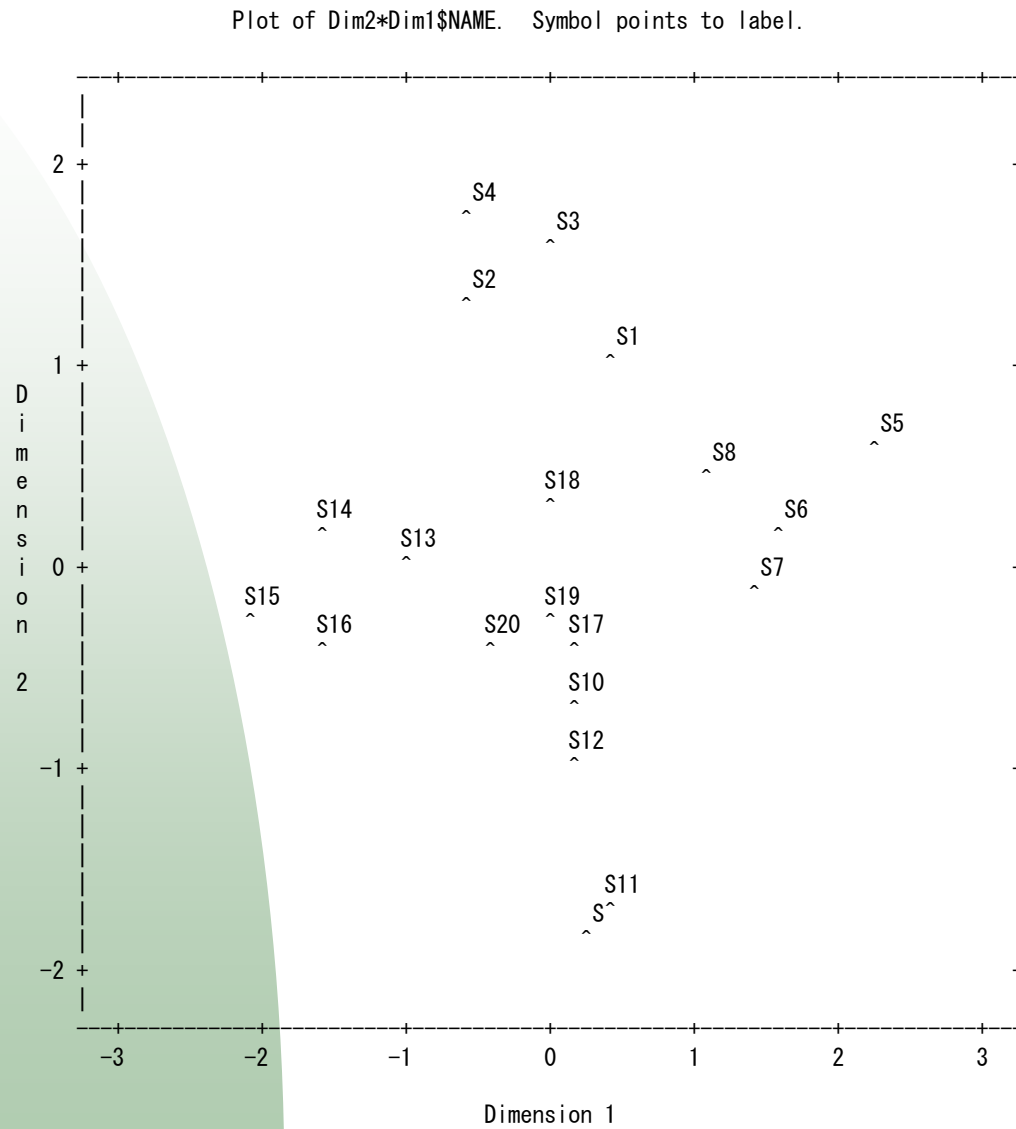
Figure 10



# 距離行列

NAME	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	S19	S20
S1	0.0	2.2	1.5	2.8	3.6	2.8	3.2	1.8	5.3	3.6	5.0	4.2	3.7	4.2	5.4	4.9	3.2	2.1	2.9	3.7
S2	2.2	0.0	1.5	1.4	5.5	4.8	4.9	3.9	5.8	4.4	5.7	4.9	3.0	2.7	4.1	3.9	4.1	2.8	3.5	3.8
S3	1.5	1.5	0.0	1.6	4.4	4.0	4.2	3.3	5.9	4.6	5.7	5.1	3.9	3.8	5.0	4.8	4.2	3.0	3.8	4.4
S4	2.8	1.4	1.6	0.0	5.3	5.1	5.2	4.5	6.2	5.3	6.1	5.6	4.1	3.3	4.5	4.5	5.0	3.9	4.6	5.0
S5	3.6	5.5	4.4	5.3	0.0	1.8	2.2	2.9	5.3	4.9	4.8	5.1	6.5	6.7	7.4	7.0	4.7	4.9	5.1	6.0
S6	2.8	4.8	4.0	5.1	1.8	0.0	1.2	1.5	4.5	3.5	4.0	3.8	5.4	6.0	6.8	6.1	3.3	3.6	3.6	4.6
S7	3.2	4.9	4.2	5.2	2.2	1.2	0.0	2.0	3.7	3.0	3.2	3.1	5.1	5.6	6.3	5.6	2.8	3.6	3.3	4.2
S8	1.8	3.9	3.3	4.5	2.9	1.5	2.0	0.0	4.9	3.0	4.4	3.6	4.4	5.3	6.4	5.6	2.6	2.5	2.7	3.7
S9	5.3	5.8	5.9	6.2	5.3	4.5	3.7	4.9	0.0	2.8	0.7	2.3	4.7	4.7	4.5	3.8	3.4	4.7	4.0	4.1
S10	3.6	4.4	4.6	5.3	4.9	3.5	3.0	3.0	2.8	0.0	2.6	0.9	2.9	4.0	4.7	3.7	0.8	2.6	1.5	1.8
S11	5.0	5.7	5.7	6.1	4.8	4.0	3.2	4.4	0.7	2.6	0.0	2.1	4.7	4.8	4.8	4.0	3.1	4.5	3.8	4.0
S12	4.2	4.9	5.1	5.6	5.1	3.8	3.1	3.6	2.3	0.9	2.1	0.0	3.4	4.2	4.7	3.6	1.4	3.1	2.1	2.2
S13	3.7	3.0	3.9	4.1	6.5	5.4	5.1	4.4	4.7	2.9	4.7	3.4	0.0	2.2	3.1	2.3	2.8	2.4	2.2	1.8
S14	4.2	2.7	3.8	3.3	6.7	6.0	5.6	5.3	4.7	4.0	4.8	4.2	2.2	0.0	1.5	1.4	4.0	3.7	3.7	3.4
S15	5.4	4.1	5.0	4.5	7.4	6.8	6.3	6.4	4.5	4.7	4.8	4.7	3.1	1.5	0.0	1.1	4.8	4.7	4.7	4.2
S16	4.9	3.9	4.8	4.5	7.0	6.1	5.6	5.6	3.8	3.7	4.0	3.6	2.3	1.4	1.1	0.0	3.8	4.0	3.7	3.2
S17	3.2	4.1	4.2	5.0	4.7	3.3	2.8	2.6	3.4	0.8	3.1	1.4	2.8	4.0	4.8	3.8	0.0	2.0	0.9	1.5
S18	2.1	2.8	3.0	3.9	4.9	3.6	3.6	2.5	4.7	2.6	4.5	3.1	2.4	3.7	4.7	4.0	2.0	0.0	1.3	1.9
S19	2.9	3.5	3.8	4.6	5.1	3.6	3.3	2.7	4.0	1.5	3.8	2.1	2.2	3.7	4.7	3.7	0.9	1.3	0.0	1.1
S20	3.7	3.8	4.4	5.0	6.0	4.6	4.2	3.7	4.1	1.8	4.0	2.2	1.8	3.4	4.2	3.2	1.5	1.9	1.1	0.0

# MDS 2次元の布置



# 距離と座標

$n$  個の個体の  $r$  次元の座標行列  $X$  から計算される個体間の2乗距離

$$d_{ij}^2 = \sum_{a=1}^r (x_{ia} - x_{ja})^2, i, j = 1, 2, \dots, n$$

を要素として持つ  $n \times n$  の行列を  $D^2$  とする。これは、行列を用いて書くと

$$D^2 = \text{diag}(XX')\mathbf{1}\mathbf{1}' - 2XX' + \mathbf{1}\mathbf{1}'\text{diag}(XX')$$

と書ける。ただし、 $\mathbf{1}$  は要素が全て1である  $n \times 1$  のベクトルである。

## 中心化行列

$$J = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}' \quad (\text{したがって } J = J', J\mathbf{1} = \mathbf{0})$$

$$J = J' \quad \text{and} \quad J\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad \text{and} \quad \mathbf{1}'J = \mathbf{0}'$$

# スカラー積行列

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2}JD^2J \\ &= -\frac{1}{2}J(\text{diag}(XX')\mathbf{1}\mathbf{1}' - 2XX' + \mathbf{1}\mathbf{1}'\text{diag}(XX'))J \\ &= JXX'J = YY' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= -\frac{1}{2} \left( d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \right) \\ &= \sum_{a=1}^r x_{ia}x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^r x_{ia} \sum_{j=1}^n x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^r x_{ja} \sum_{i=1}^n x_{ia} + \frac{1}{n^2} \sum_{a=1}^r \left( \sum_{i=1}^n x_{ia} \right) \left( \sum_{j=1}^n x_{ja} \right) \\ &= \sum_{a=1}^r \left( x_{ia} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ka} \right) \left( x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ka} \right) \\ &= \sum_{a=1}^r y_{ia}y_{ja} \end{aligned}$$



# 古典的MDS

D	1	2	3	D2	1	2	3
1	0.00	3.00	5.00	1	0.00	9.00	25.00
2	3.00	0.00	4.00	2	9.00	0.00	16.00
3	5.00	4.00	0.00	3	25.00	16.00	0.00

J	1	2	3	B	1	2	3
1	0.67	-0.33	-0.33	1	5.78	-0.22	-5.56
2	-0.33	0.67	-0.33	2	-0.22	2.78	-2.56
3	-0.33	-0.33	0.67	3	-5.56	-2.56	8.11

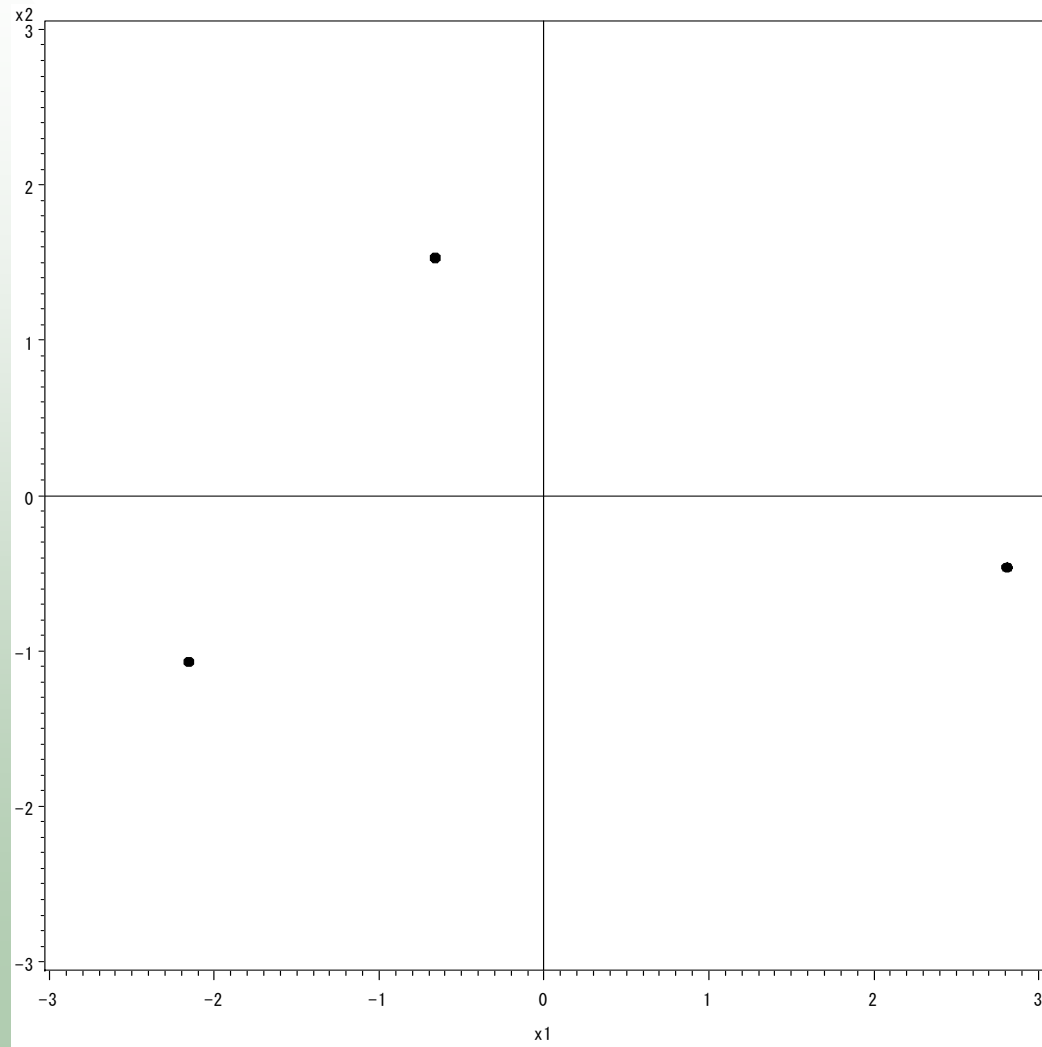
# 固有値他

EVA	1	EVE	1	2	3	X	1	2
12.964	1	-0.598	-0.556	0.577	1	-2.152	-1.070	
3.703	2	-0.183	0.796	0.577	2	-0.658	1.531	
-0.000	3	0.781	-0.240	0.577	3	2.810	-0.461	

D2FROMX	1	2	3	DIF	1	2	3
1	0.00	9.00	25.00	1	0.00000	0.00000	-0.00000
2	9.00	0.00	16.00	2	0.00000	0.00000	0.00000
3	25.00	16.00	0.00	3	-0.00000	0.00000	0.00000

# 個体の布置



# 古典的MDS

D	1	2	3	4	D2	1	2	3	4
1	0.00	3.00	5.00	1.00	1	0.00	9.00	25.00	1.00
2	3.00	0.00	4.00	1.00	2	9.00	0.00	16.00	1.00
3	5.00	4.00	0.00	1.00	3	25.00	16.00	0.00	1.00
4	1.00	1.00	1.00	0.00	4	1.00	1.00	1.00	0.00

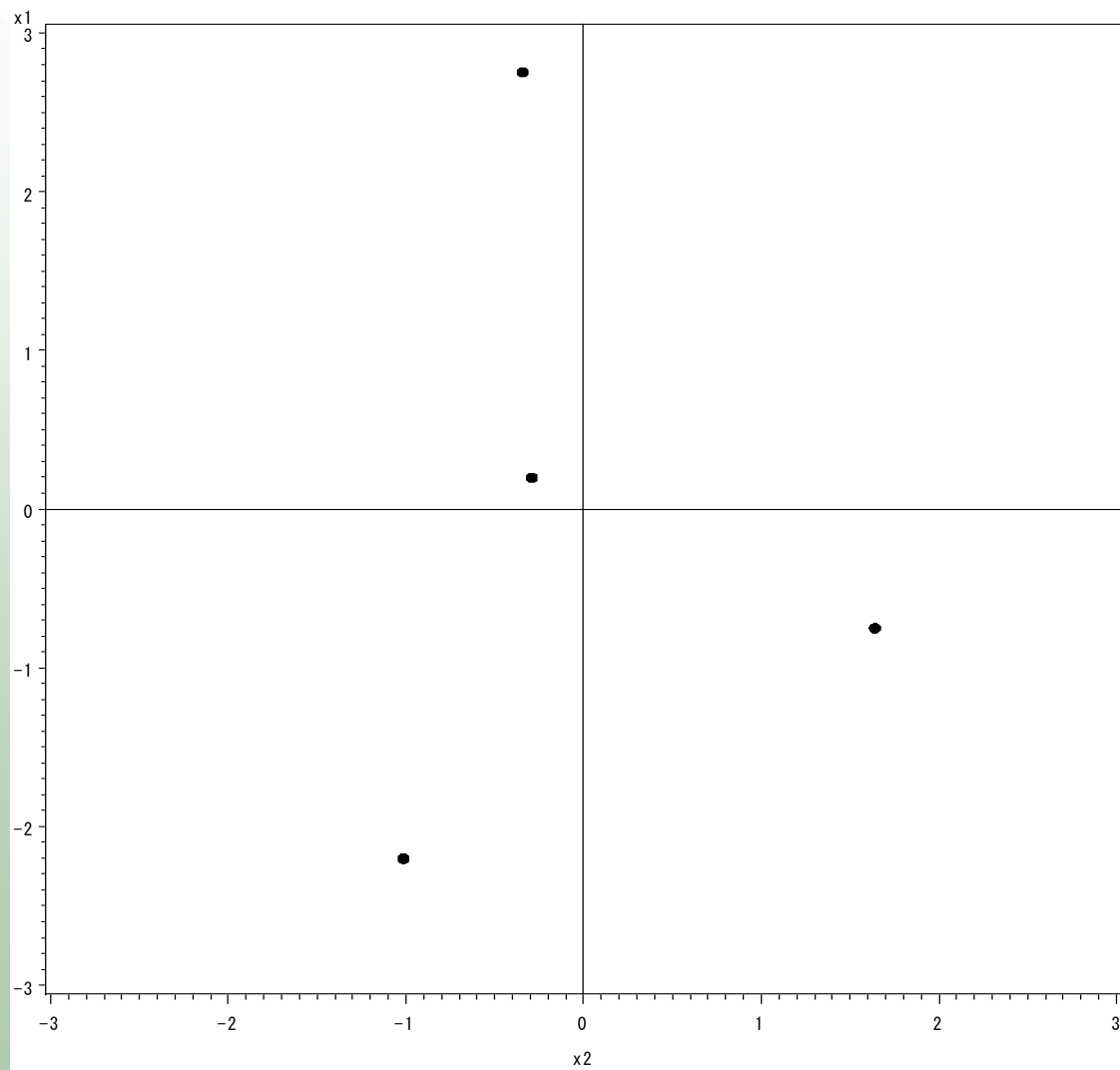
J	1	2	3	4	B	1	2	3	4
1	0.75	-0.25	-0.25	-0.25	1	5.44	-0.19	-6.19	0.94
2	-0.25	0.75	-0.25	-0.25	2	-0.19	3.19	-2.81	-0.19
3	-0.25	-0.25	0.75	-0.25	3	-6.19	-2.81	7.19	1.81
4	-0.25	-0.25	-0.25	0.75	4	0.94	-0.19	1.81	-2.56

# 固有价值

1 EVE		1	2	3	4 X		1	2	3
13.029	1	-0.610	-0.511	0.500	-0.342	1	-2.202	-1.012	0.000
3.921	2	-0.207	0.829	0.500	-0.138	2	-0.749	1.642	0.000
0.000	3	0.763	-0.172	0.500	-0.372	3	2.754	-0.342	0.000
-3.700	4	0.055	-0.146	0.500	0.852	4	0.197	-0.289	0.000

D2FROMX		1	2	3	4 DIF		1	2	3	4
1		0.00	9.15	25.00	6.27	1	0.00000	-0.15408	-0.00329	-5.27379
2		9.15	0.00	16.20	4.63	2	-0.15408	0.00000	-0.20238	-3.62500
3		25.00	16.20	0.00	6.54	3	-0.00329	-0.20238	0.00000	-5.54043
4		6.27	4.63	6.54	0.00	4	-5.27379	-3.62500	-5.54043	0.00000

# 個体の布置



# 東京データ

授業を聴講している 11 人の学生に、  
東京の盛り場 8 箇所

六本木、新宿、渋谷、品川、新橋、上野  
の対を提示し、「遠い」と思う学生の数を書いた。  
同様に、「似ている」と思う学生の数を書いた。

# 「遠い」データ

Obs	name	s1	s2	s3	s4	s5	s6
1	六本木	0	7	1	1	0	5
2	新宿	7	0	0	10	11	8
3	渋谷	1	0	0	1	2	11
4	品川	1	10	1	0	0	6
5	新橋	0	11	2	0	0	2
6	上野	5	8	11	6	2	0



# スカラー積行列

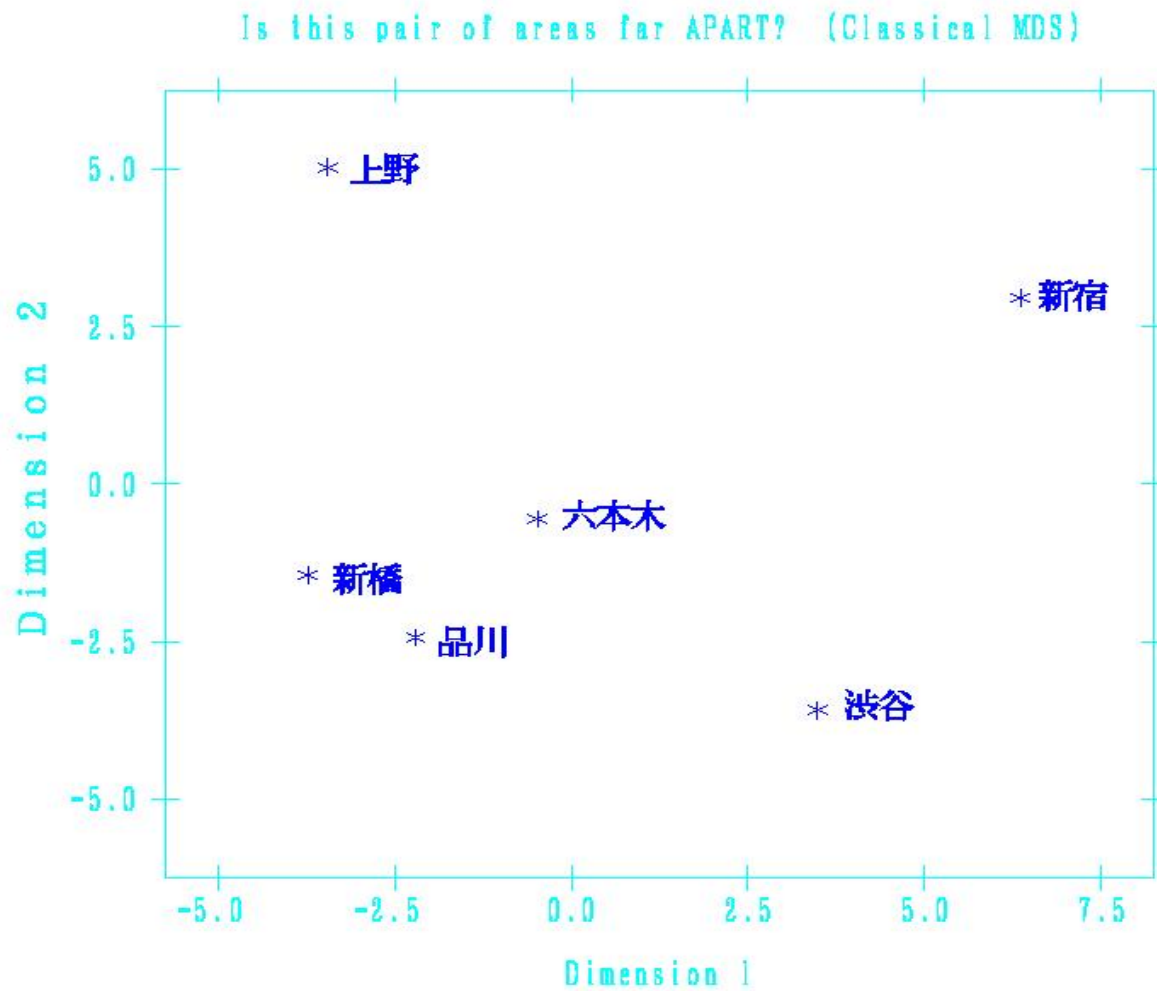
B	1	2	3	4	5	6
1	-1.97	-4.97	1.78	2.69	2.44	0.03
2	-4.97	41.03	23.78	-25.3	-36.6	2.03
3	1.78	23.78	6.53	6.94	4.69	-43.7
4	2.69	-25.3	6.94	8.36	7.61	-0.31
5	2.44	-36.6	4.69	7.61	6.86	14.94
6	0.03	2.03	-43.7	-0.31	14.94	27.03

# 固有値等

EVA		1	EVE	1	2	3	4	5	6
1	83.496	1	-0.052	-0.073	0.408	0.024	0.907	-0.035	
2	55.191	2	0.696	0.399	0.408	0.020	-0.128	-0.415	
3	0.000	3	0.382	-0.482	0.408	-0.199	-0.172	0.622	
4	-0.444	4	-0.241	-0.327	0.408	0.751	-0.251	-0.203	
5	-2.956	5	-0.408	-0.194	0.408	-0.628	-0.223	-0.430	
6	-47.453	6	-0.377	0.677	0.408	0.032	-0.134	0.462	

X		1	2
1	六本木	-0.475	-0.543
2	新宿	6.364	2.961
3	渋谷	3.486	-3.580
4	品川	-2.202	-2.429
5	新橋	-3.728	-1.441
6	上野	-3.446	5.033

# 個体の布置



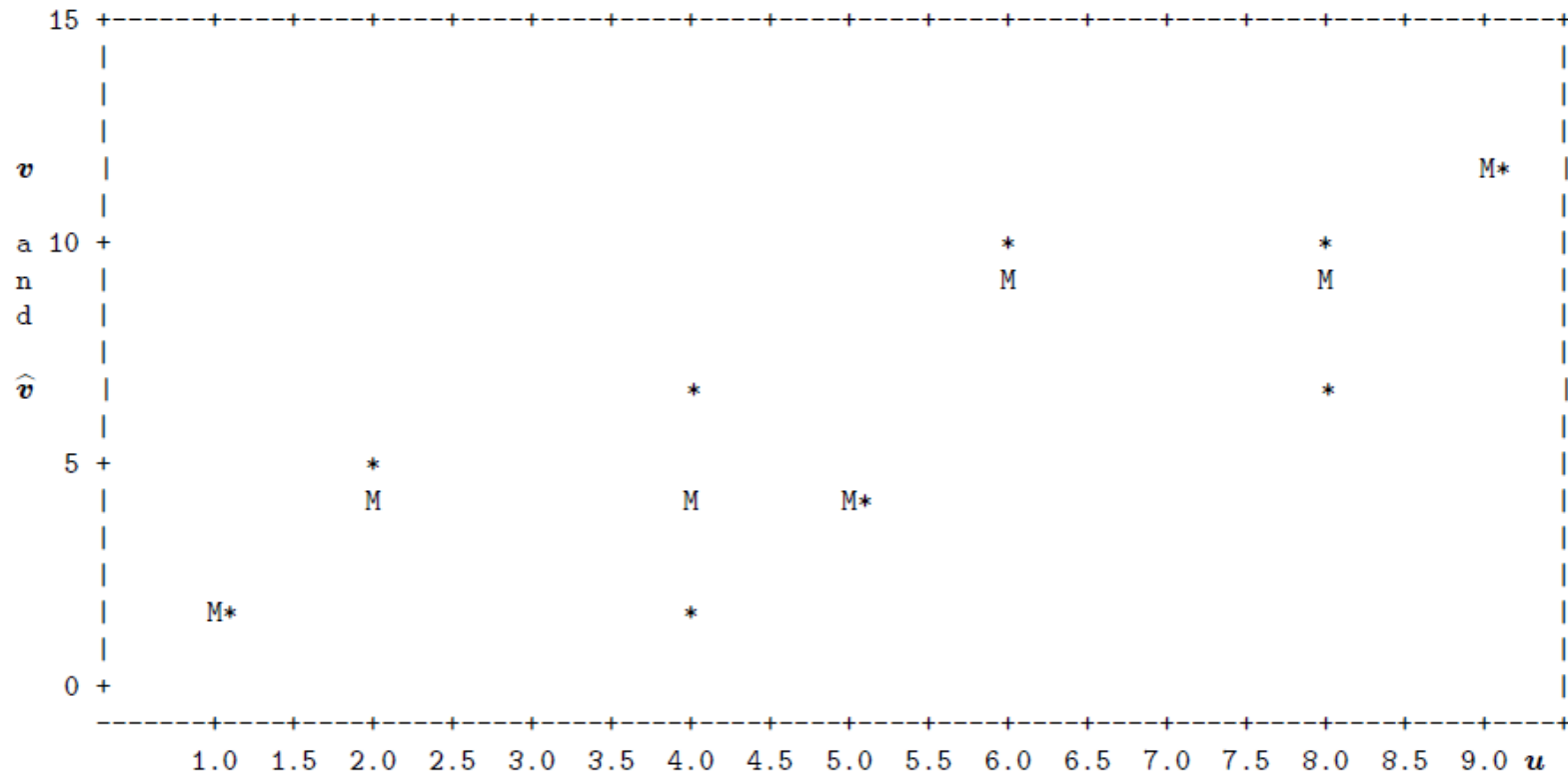
# 最小二乘基準

$$\text{RSS1} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^i (o_{ij} - d_{ij})^2$$

$$\text{RSS1} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^i (\tau(o_{ij}) - d_{ij})^2$$

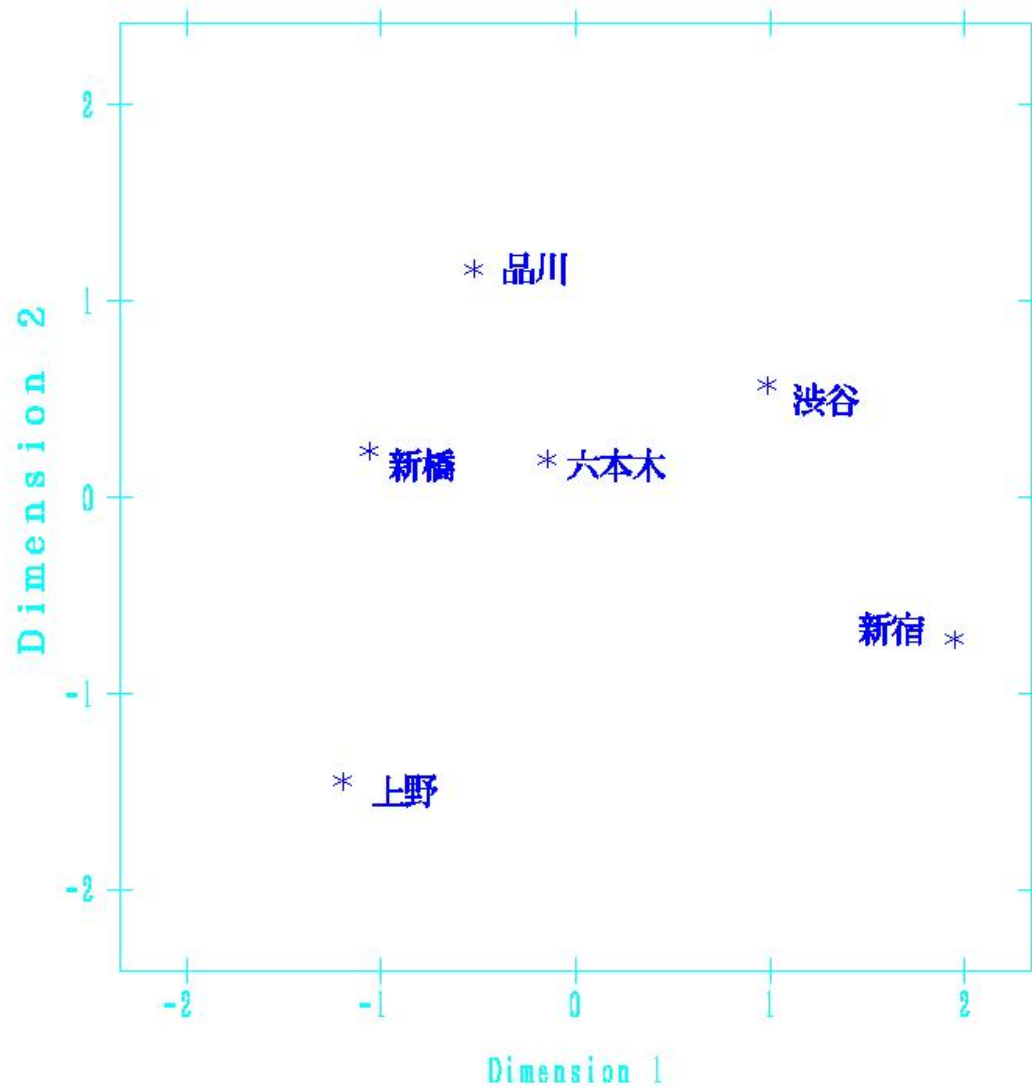
$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial x_{ka}} = -2 \sum_{j=1}^n (o_{kj} - d_{kj}) \frac{(x_{ka} - x_{ja})}{d_{kj}} = 0$$

# データの最適変換



# 非計量的 MDS stress= 0.3720

Is this pair of areas far APART?



# 「似ている」データ

Obs	name	s1	s2	s3	s4	s5	s6
1	六本木	0	3	3	1	3	0
2	新宿	3	0	11	0	0	0
3	渋谷	3	11	0	0	0	0
4	品川	1	0	0	0	8	1
5	新橋	3	0	0	8	0	5
6	上野	0	0	0	1	5	0

各数値を最大値 11 から引いて非類似度に変換する。

# 固有値等

EVA		1	EVE	1	2	3	4	5	6
1	130.202	1	0.167	-0.394	0.768	0.403	0.063	-0.245	
2	54.532	2	0.503	0.096	-0.242	0.513	-0.635	0.113	
3	36.409	3	0.503	0.096	-0.242	0.293	0.762	0.113	
4	0.000	4	-0.389	-0.463	-0.514	0.403	0.063	-0.452	
5	-0.000	5	-0.450	-0.109	0.074	0.403	0.063	0.783	
6	-7.142	6	-0.335	0.775	0.154	0.403	0.063	-0.312	

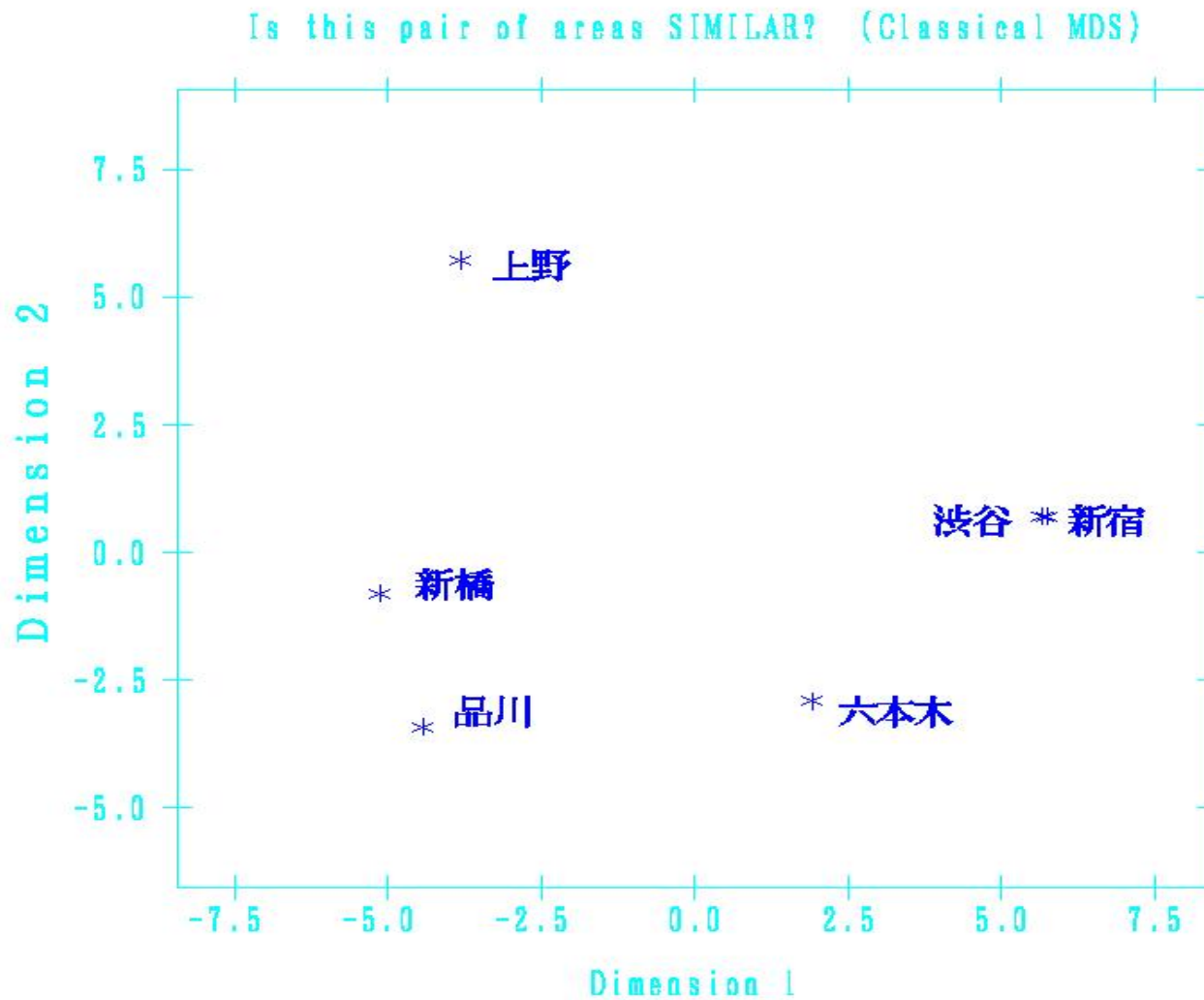
X		1	2
1	六本木	1.906	-2.909
2	新宿	5.742	0.706
3	渋谷	5.742	0.706
4	品川	-4.435	-3.419
5	新橋	-5.135	-0.806
6	上野	-3.820	5.722



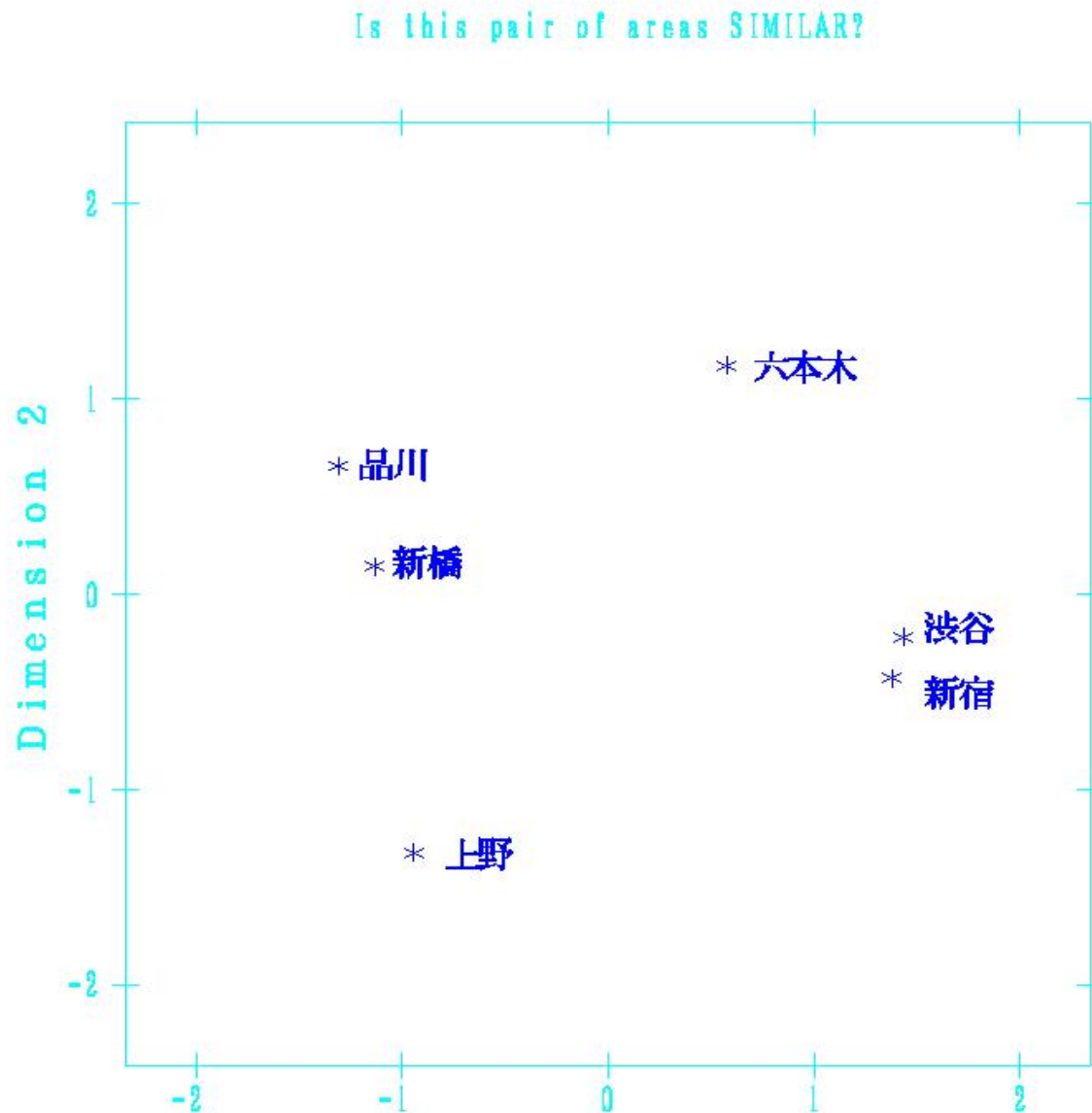
# 非類似度等

0	1	2	3	4	5	6	02	1	2	3	4	5	6
1	0.00	8.00	8.00	10.00	8.00	11.00	1	0.00	64.00	64.00	100.0	64.00	121.0
2	8.00	0.00	0.00	11.00	11.00	11.00	2	64.00	0.00	0.00	121.0	121.0	121.0
3	8.00	0.00	0.00	11.00	11.00	11.00	3	64.00	0.00	0.00	121.0	121.0	121.0
4	10.00	11.00	11.00	0.00	3.00	10.00	4	100.0	121.0	121.0	0.00	9.00	100.0
5	8.00	11.00	11.00	3.00	0.00	6.00	5	64.00	121.0	121.0	9.00	0.00	36.00
6	11.00	11.00	11.00	10.00	6.00	0.00	6	121.0	121.0	121.0	100.0	36.00	0.00
J	1	2	3	4	5	6	B	1	2	3	4	5	6
1	0.83	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	1	33.17	2.33	2.33	-13.7	-4.00	-20.2
2	-0.17	0.83	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	2	2.33	35.50	35.50	-23.0	-31.3	-19.0
3	-0.17	-0.17	0.83	-0.17	-0.17	-0.17	3	2.33	35.50	35.50	-23.0	-31.3	-19.0
4	-0.17	-0.17	-0.17	0.83	-0.17	-0.17	4	-13.7	-23.0	-23.0	39.50	26.67	-6.50
5	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	0.83	-0.17	5	-4.00	-31.3	-31.3	26.67	22.83	17.17
6	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	-0.17	0.83	6	-20.2	-19.0	-19.0	-6.50	17.17	47.50

# 個体の布置



# 非計量的 MDS stress=0.2900



# 個人差モデル

$$d_{ijk}^2 = \sum_{a=1}^r w_{ka} (x_{ia} - x_{ja})^2$$

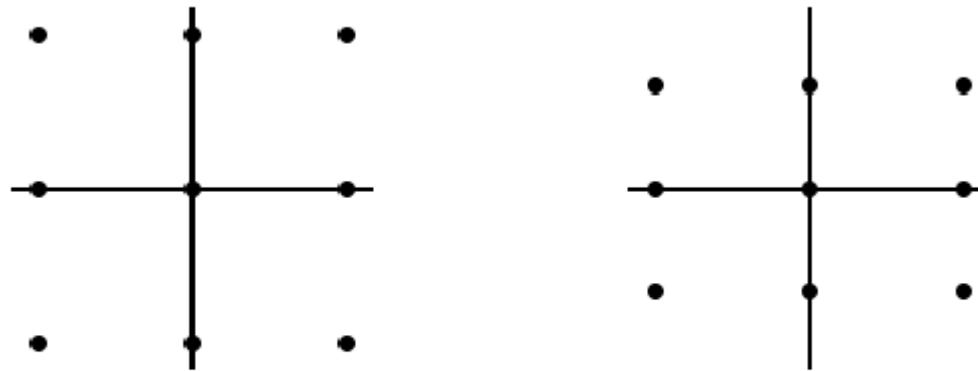


図 1: 個人差 MDS モデル [図 indclus]  
 $w_{s1} > w_{s2}$  の場合

# 個人差モデル データ

[[10]]

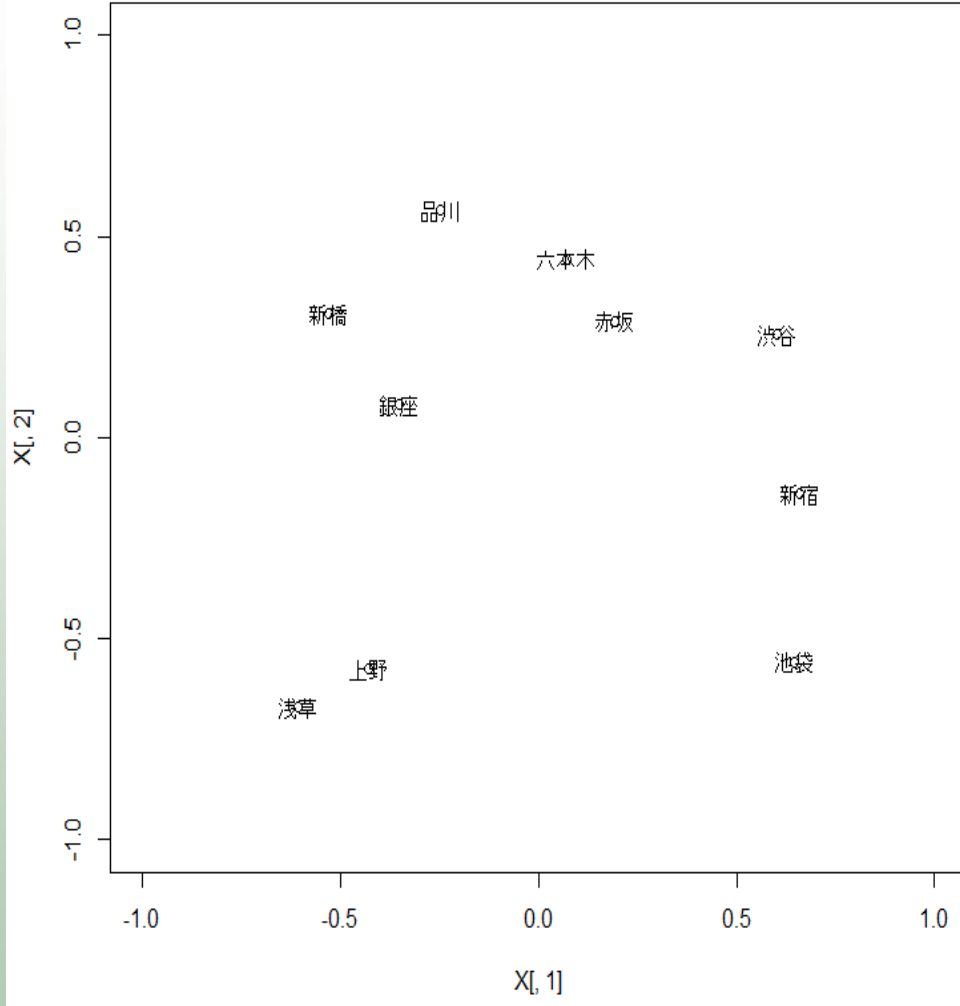
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
池袋	0	5	5	4	4	3	2	1	3	3
上野	5	0	1	1	2	3	4	4	3	3
浅草	5	1	0	2	4	4	4	5	4	4
銀座	4	1	2	0	1	2	4	4	2	3
新橋	4	2	4	1	0	2	3	4	2	3
品川	3	3	4	2	2	0	2	2	2	2
渋谷	2	4	4	4	3	2	0	1	2	2
新宿	1	4	5	4	4	2	1	0	3	3
六本木	3	3	4	2	2	2	2	3	0	1
赤坂	3	3	4	3	3	2	2	3	1	0

[[11]]

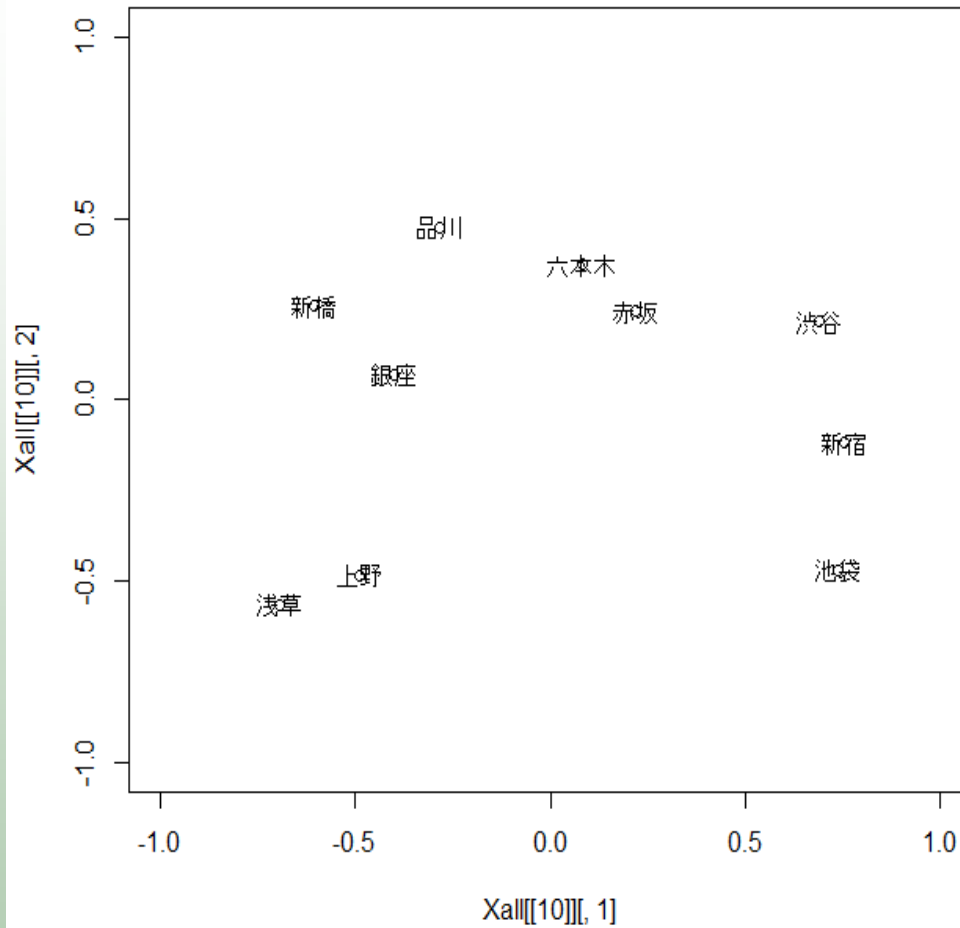
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
池袋	0	4	4	5	5	5	2	1	5	5
上野	4	0	1	5	5	5	5	4	5	5
浅草	4	1	0	4	5	5	5	4	5	5
銀座	5	5	4	0	2	2	2	2	2	2
新橋	5	5	5	2	0	2	2	4	2	2
品川	5	5	5	2	2	0	2	4	2	2
渋谷	2	5	5	2	2	2	0	1	2	2
新宿	1	4	4	2	4	4	1	0	2	2
六本木	5	5	5	2	2	2	2	2	0	1
赤坂	5	5	5	2	2	2	2	2	1	0

# 個人差モデル

X		D1	D2		D1	D2
				[1, ]	1.0273803	0.9891380
				[2, ]	0.9613172	1.0953586
				[3, ]	0.9480449	1.0124157
				[4, ]	0.9147024	1.0514098
				[5, ]	1.0984880	0.8923593
				[6, ]	0.9491279	1.0604830
				[7, ]	1.0042720	1.0099727
				[8, ]	0.9936499	1.0553998
				[9, ]	0.9659893	0.9602834
				[10, ]	1.1410789	0.8423273 *
				[11, ]	0.7575254	1.2671746 *
				[12, ]	0.9569522	1.1007264
				[13, ]	1.0306135	0.9688260
				[14, ]	0.9866276	0.9808495
				[15, ]	0.9058306	1.1524945
				[16, ]	0.9279470	1.0993815
				[17, ]	0.9008094	1.0934086
				[18, ]	0.9720943	1.0525634
				[19, ]	0.9732002	0.9860377
				[20, ]	1.0108802	1.0424893
				[21, ]	0.7986627	1.1706445



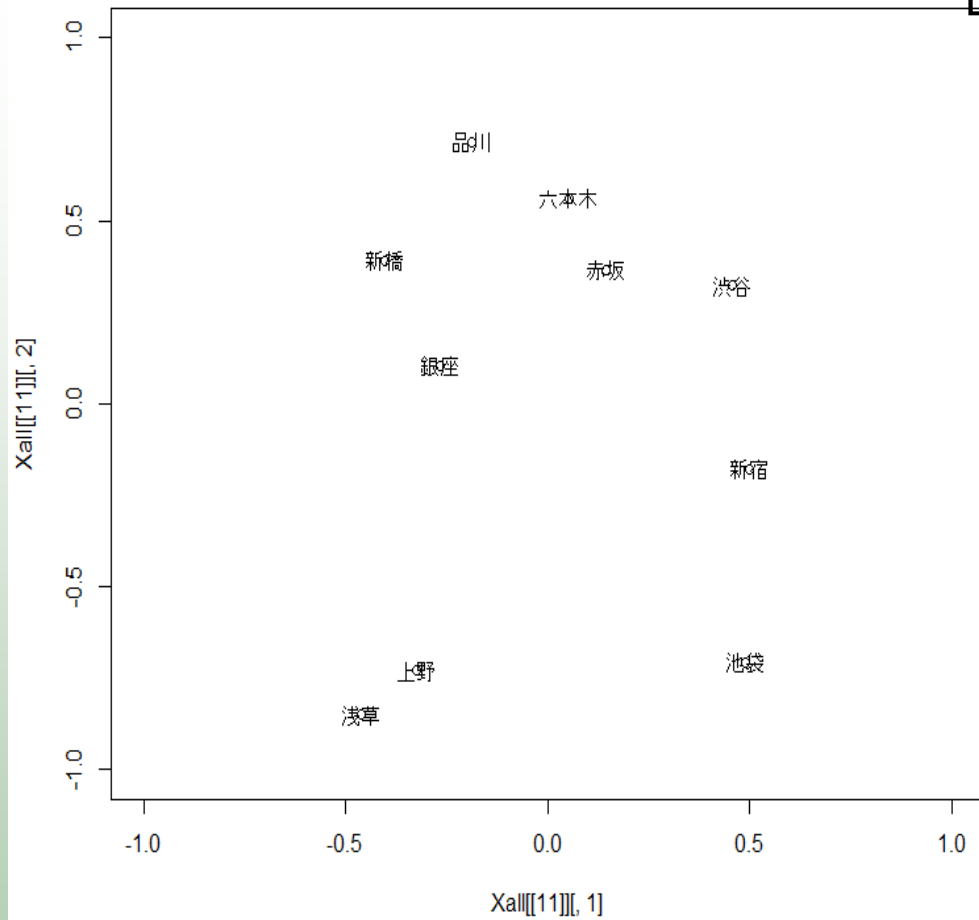
[10, ] 1.1410789 0.8423273



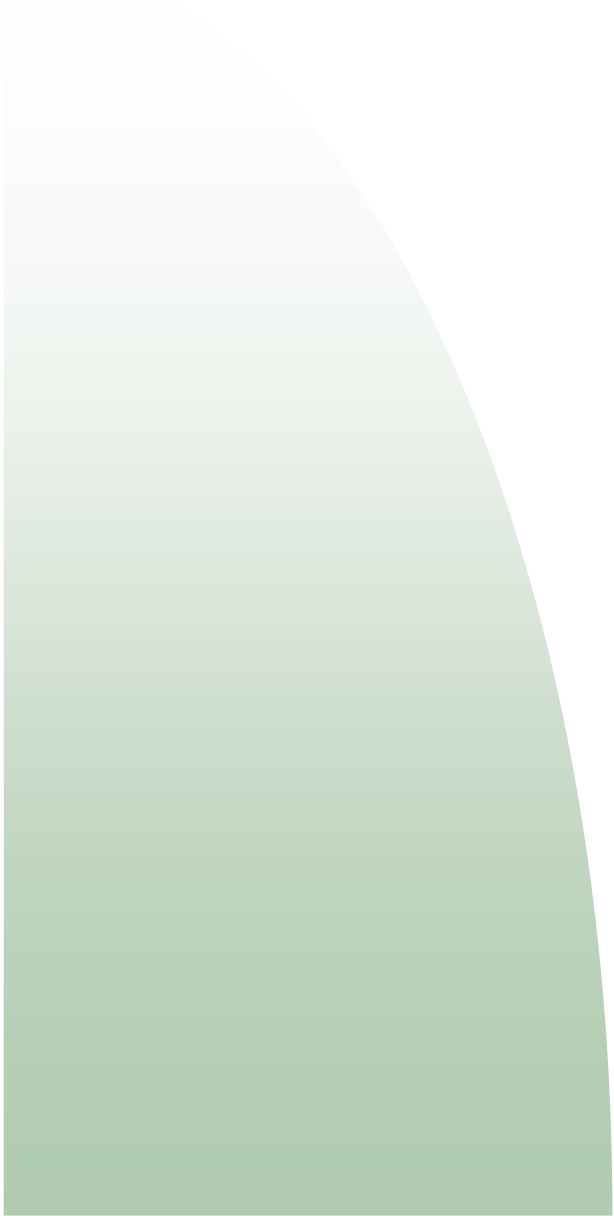
	D1	D2
1	0.73547581	-0.46981090
2	-0.49083043	-0.48474426
3	-0.69354615	-0.56486227
4	-0.40096199	0.06937955
5	-0.60642220	0.25963453
6	-0.28308259	0.47534008
7	0.68832655	0.21516569
8	0.75193009	-0.11820887
9	0.08133618	0.37430187
10	0.21777473	0.24380459



[11] 0.7575254 1.2671746



D1	D2
1	0.48825862 -0.7067709
2	-0.32584646 -0.7292363
3	-0.46042288 -0.8497637
4	-0.26618570 0.1043727
5	-0.40258410 0.3905872
6	-0.18792938 0.7150889
7	0.45695775 0.3236895
8	0.49918209 -0.1778303
9	0.05399646 0.5630897
10	0.14457360 0.3667731



# 統計演習B

---

多次元尺度法

# スカラー積行列

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2}JD^2J \\ &= -\frac{1}{2}J(\text{diag}(XX')\mathbf{1}\mathbf{1}' - 2XX' + \mathbf{1}\mathbf{1}'\text{diag}(XX'))J \\ &= JXX'J = YY' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= -\frac{1}{2} \left( d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \right) \\ &= \sum_{a=1}^r x_{ia}x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^r x_{ia} \sum_{j=1}^n x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{a=1}^r x_{ja} \sum_{i=1}^n x_{ia} + \frac{1}{n^2} \sum_{a=1}^r \left( \sum_{i=1}^n x_{ia} \right) \left( \sum_{j=1}^n x_{ja} \right) \\ &= \sum_{a=1}^r \left( x_{ia} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ka} \right) \left( x_{ja} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ka} \right) \\ &= \sum_{a=1}^r y_{ia}y_{ja} \end{aligned}$$

# program

```
# classical MDS
```

```
# data
```

```
O=matrix( c( 0, 3, 5  
            , 3, 0, 4  
            , 5, 4, 0), 3, 3, byrow=1 )
```

```
# classical MDS
```

```
resCMDS=cmdscale( O, eig=TRUE, k=2 )
```

```
X=resCMDS$points
```

```
# plot X
```

```
plot(X[, 1], X[, 2], xlim=c(-4, 4), ylim=c(-4, 4), type="n")  
text(X[, 1], X[, 2], 1:3)
```

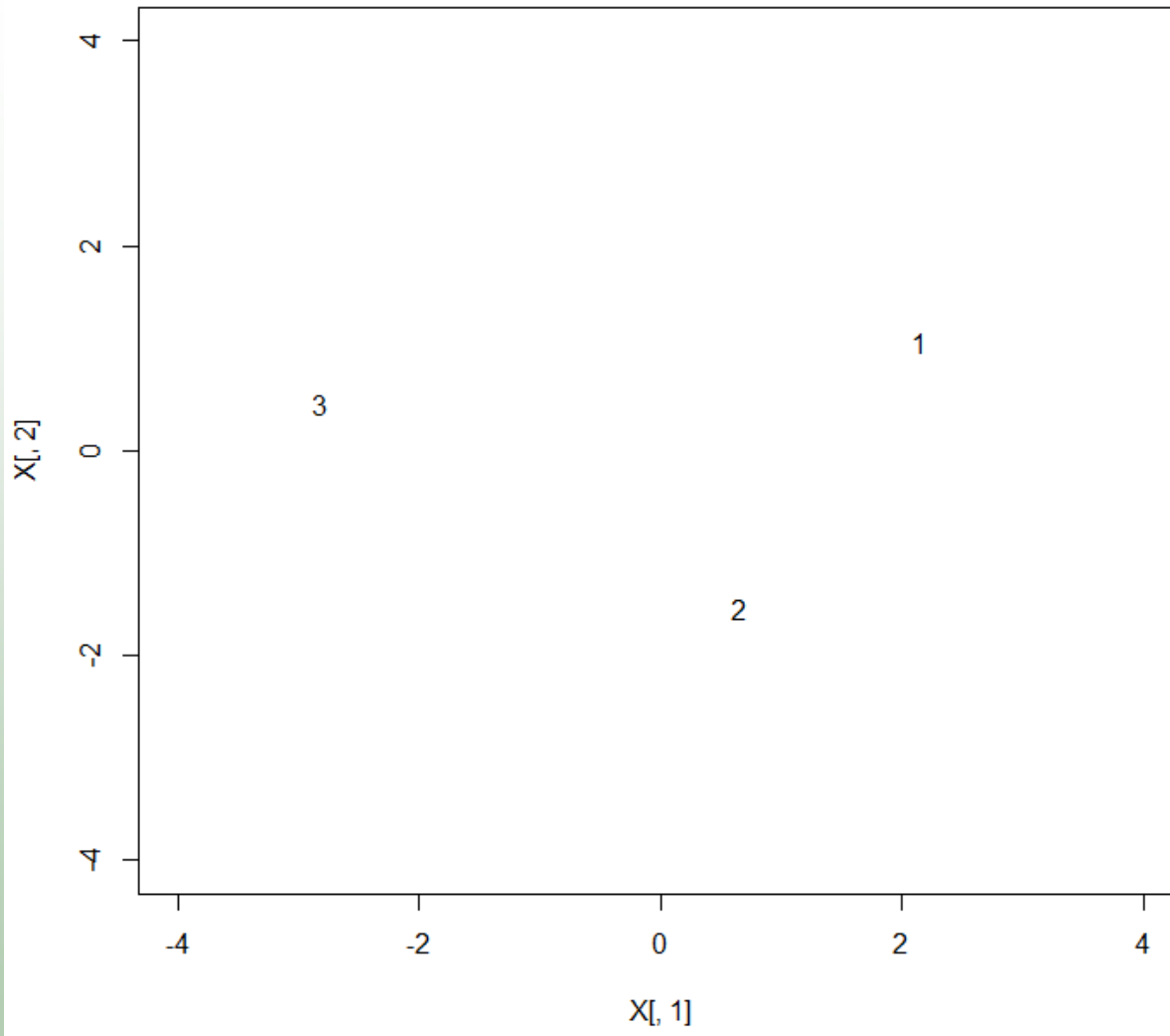
```
> print(resCMDS)
```

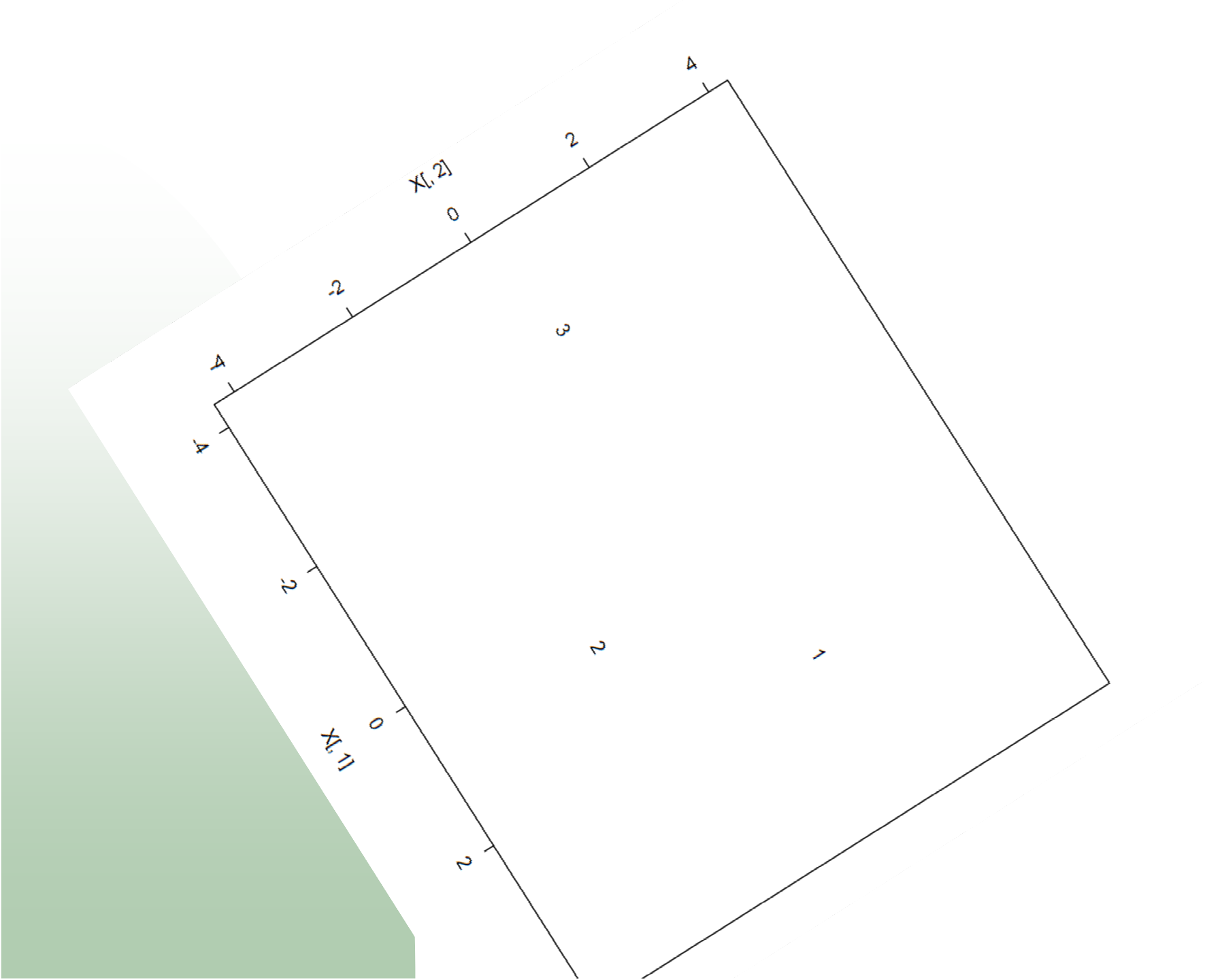
```
$points
```

```
      [,1] [,2]  
[1,] 2.1523110 1.0702033  
[2,] 0.6581288 -1.5312231  
[3,] -2.8104398 0.4610198
```

```
$eig
```

```
[1] 1.296415e+01 3.702519e+00 3.552714e-15
```







```

cmds <- function( 0, nr=2, plot=0 ){
  n=nrow(0)

  # double center 0^2
  I=diag(n); one=matrix(1,n,1)
  J=I-(1/n) * one %*% t(one)
  B = -(1/2) * J %*% 0^2 %*% J

  ev=eigen(B);
  eva=matrix(ev$values, length(ev$values), 1);
  eve=ev$vectors;

  X = eve[, 1:nr] %*% diag(sqrt(eva[1:nr]))

  if( plot == 1){
    plot(X, type="n", xlim=c(-5, 5), ylim=c(-5, 5))
    text(X, rownames(0))
  }
  return( X )
} # end of cmds

```

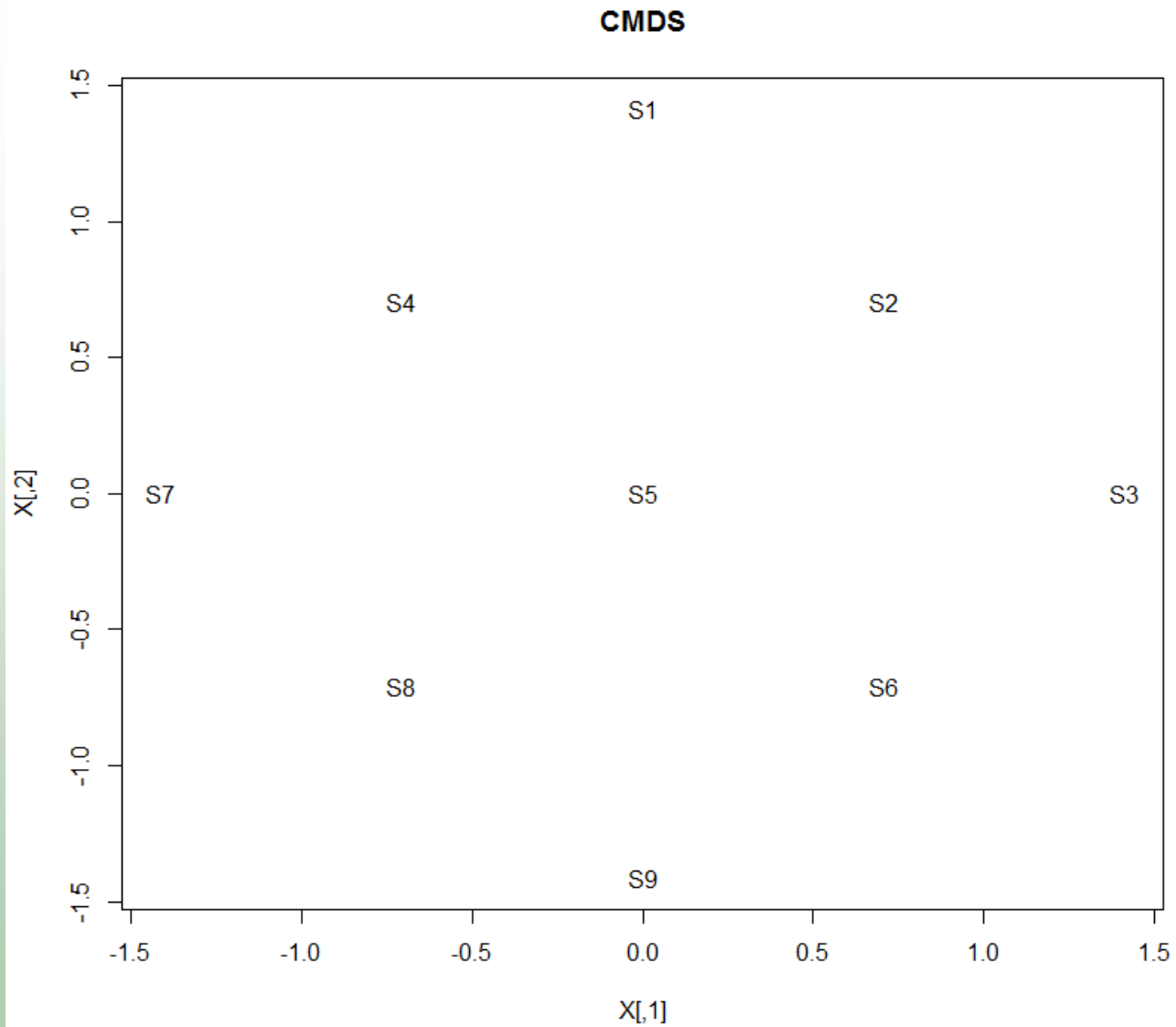
# nonmetric MDS

```
# data matrix
Y=matrix(c( -1, 1 , 0, 1 , 1, 1
           , -1, 0 , 0, 0 , 1, 0
           , -1, -1 , 0, -1 , 1, -1
           ), 9, 2, byrow=1)
rownames(Y)=paste("S", 1:9, sep="")
plot(Y, main="original Y")
text(Y, rownames(Y))

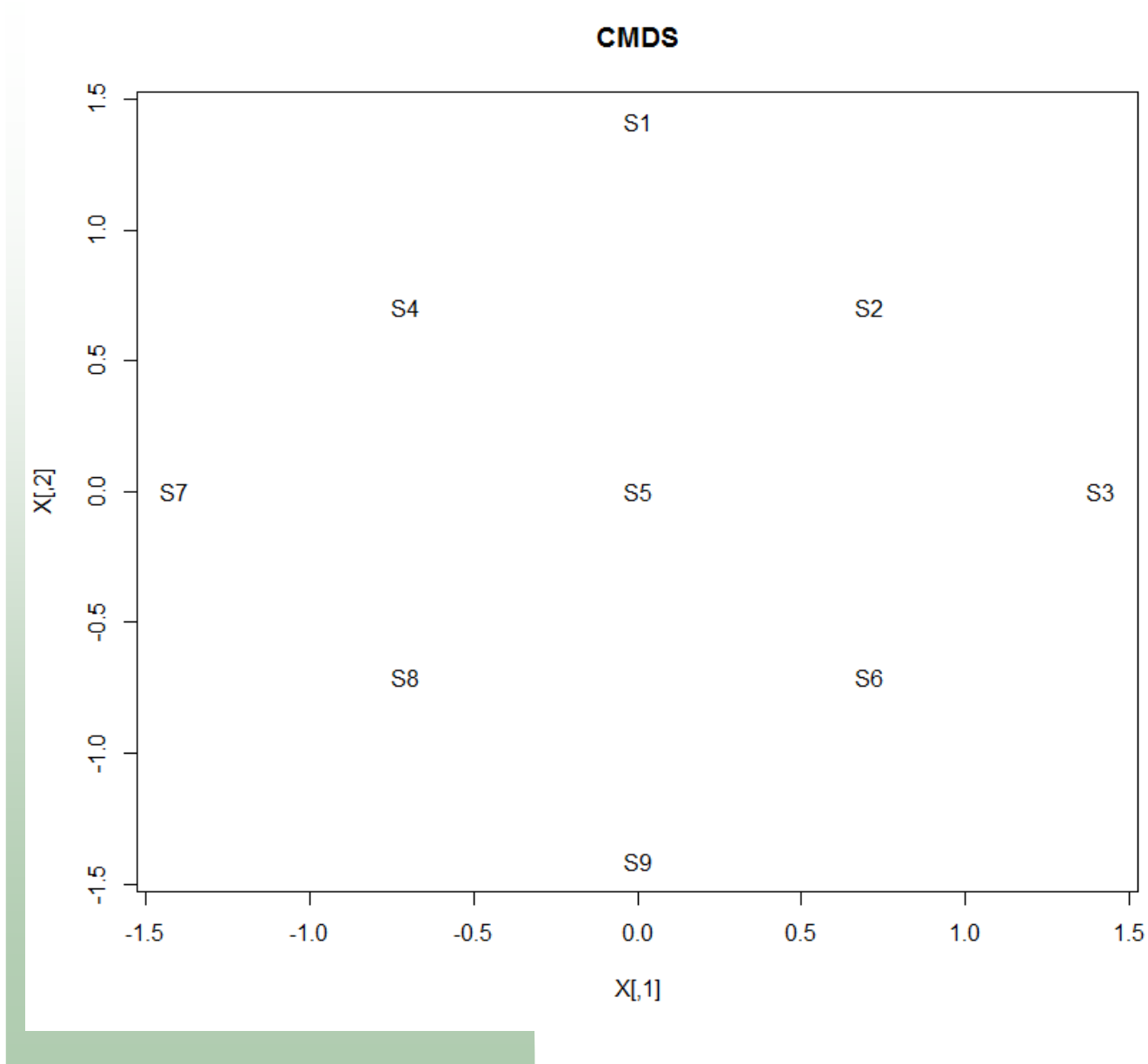
# exact distance
O=dist(Y, diag=1, upper=1)

# classical MDS
resCMDS=cmdscale( O, eig=TRUE, k=2 )
X=resCMDS$points
plot(X, main="CMDS", type="n")
text(X, rownames(Y))
```

# Y 行列



# Classical MDS by cmdscale



# 最小二乘基準

$$\text{RSS1} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^i (o_{ij} - d_{ij})^2$$

$$\text{RSS1} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^i (\tau(o_{ij}) - d_{ij})^2$$

$$\frac{\partial \text{RSS}}{\partial x_{ka}} = -2 \sum_{j=1}^n (o_{kj} - d_{kj}) \frac{(x_{ka} - x_{ja})}{d_{kj}} = 0$$

# package smacof

## Symmetric smacof

### Description

Multidimensional scaling (stress minimization: SMACOF) on symmetric dissimilarity matrix.

### Usage

```
smacofSym(delta, ndim = 2, type = c("ratio", "interval", "ordinal", "mspline"), weightmat = NULL, init = NULL, ties = "primary", verbose = FALSE, relax = FALSE, modulus = 1, itmax = 1000, eps = 1e-06, spline.degree = 2, spline.intKnots = 2)
```

### Arguments

delta

Either a symmetric dissimilarity matrix or an object of class "dist"

ndim

Number of dimensions

weightmat

Optional matrix with dissimilarity weights

init

Matrix with starting values for configurations (optional)

type

MDS type: "interval", "ratio", or "ordinal" (nonmetric MDS)

ties

Tie specification for ordinal MDS only: "primary", "secondary", or "tertiary"

verbose

If TRUE, intermediate stress is printed out

relax

If TRUE, block relaxation is used for majorization

modulus

Number of smacof iterations per monotone regression call

itmax

Maximum number of iterations

eps

Convergence criterion

spline.degree

Degree of the spline for "mspline" MDS type

spline.intKnots

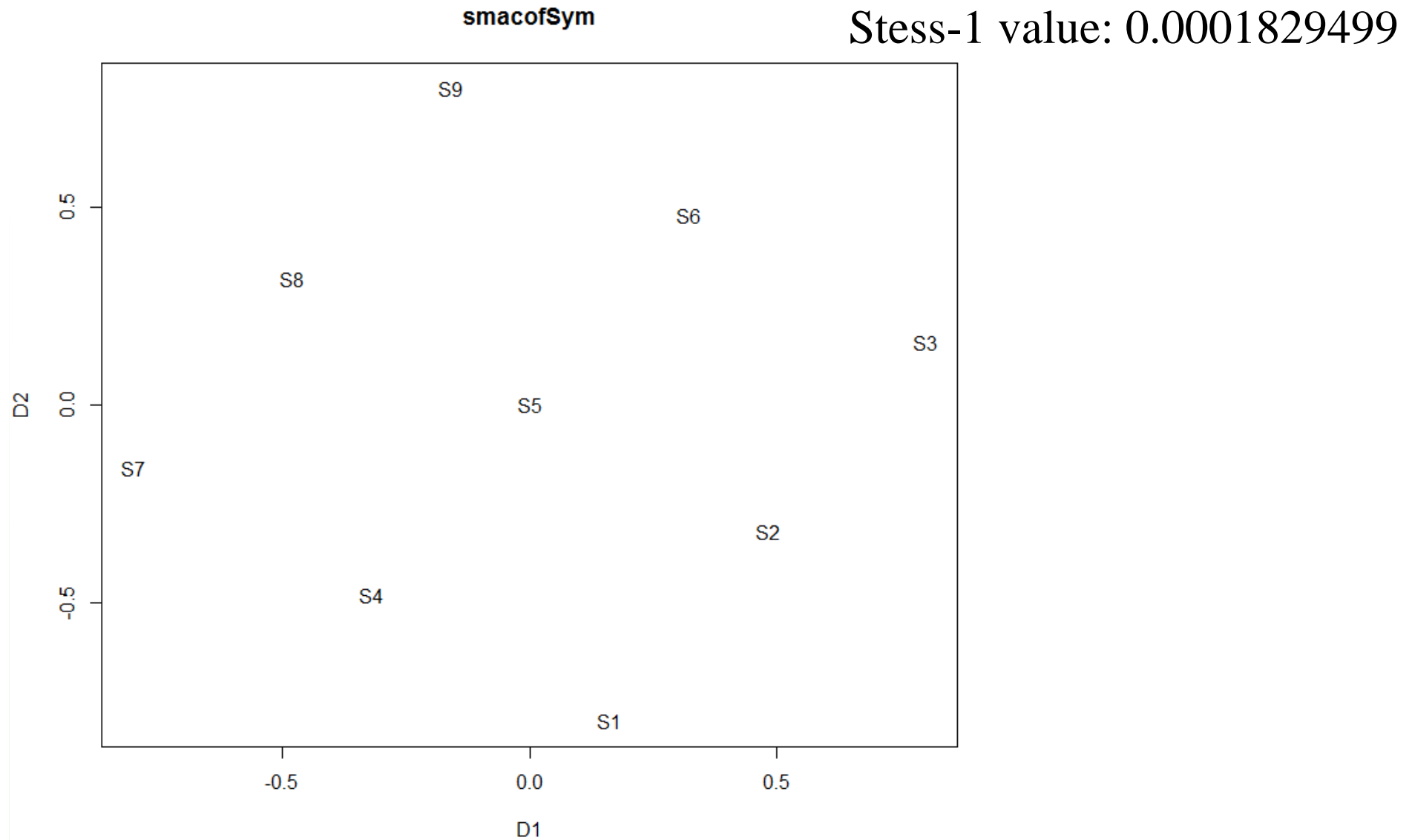
Number of interior knots of the spline for "mspline" MDS type

# metric MDS by smacof

```
resSM=smacofSym( 0, ndim=2 )
print(resSM)
X=resSM$conf
plot(X, main="smacofSym", type="n")
text(X, rownames(Y))
```

```
resSM=smacofSym( 0^4, ndim=2 )
print(resSM)
X=resSM$conf
plot(X, main="data=0^4    smacofSym", type="n")
text(X, rownames(Y))
```

# metric MDS by smacof

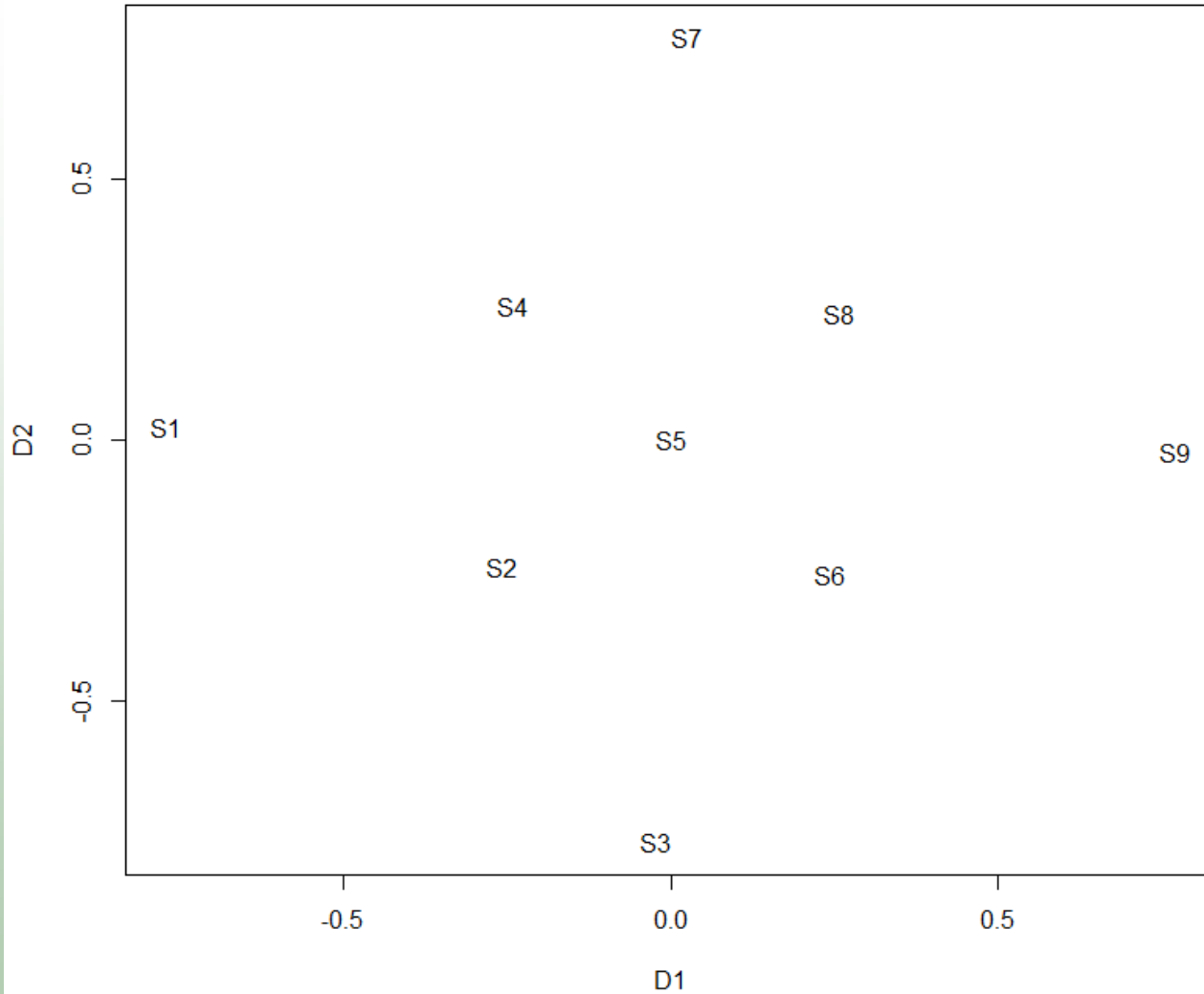




# metric MDS by smacof $O^4$

data= $O^4$  smacofSym

Stress-1 value: 0.5295638



# nonmetric MDS by smacof

```
resSM=smacofSym( 0^4, ndim=2, type="ordinal", ties="secondary" )
```

```
print(resSM)
```

```
X=resSM$conf
```

```
plot(X, main="data=0^4 smacofSym ordinal", type="n")
```

```
text(X, rownames(Y))
```

```
dd=cbind(resSM$obsdiss, resSM$delta)
```

```
dd=dd[order(dd[, 1]), ]
```

```
plot(dd, type="l", main="0 vs 0hat data=0^4 smacofSym ordinal")
```

```
resSM=smacofSym( 0^(1/4), ndim=2, type="ordinal", ties="secondary" )
```

```
print(resSM)
```

```
X=resSM$conf
```

```
plot(X, main="data=0^(1/4) smacofSym ordinal", type="n")
```

```
text(X, rownames(Y))
```

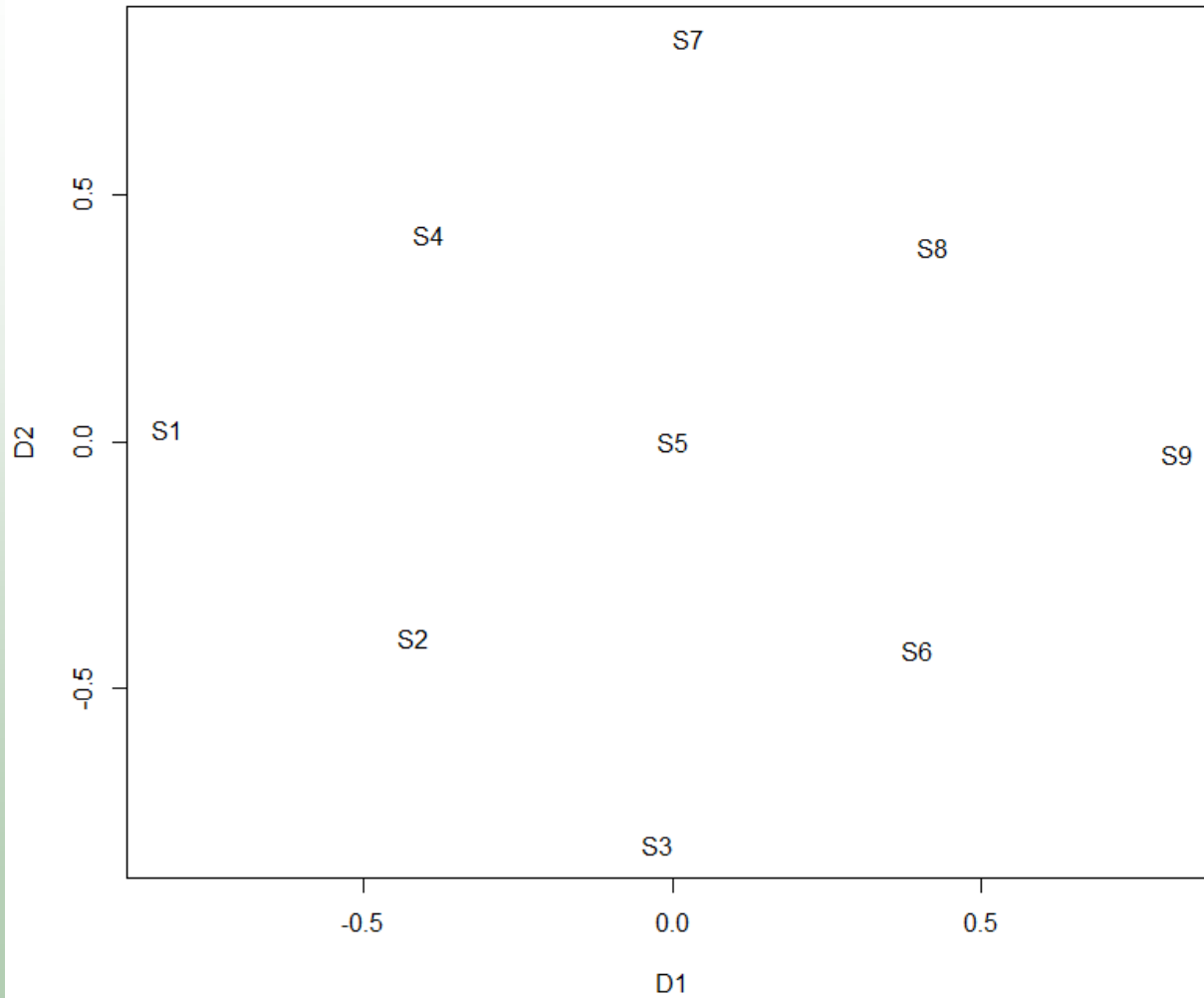
```
dd=cbind(resSM$obsdiss, resSM$delta)
```

```
dd=dd[order(dd[, 1]), ]
```

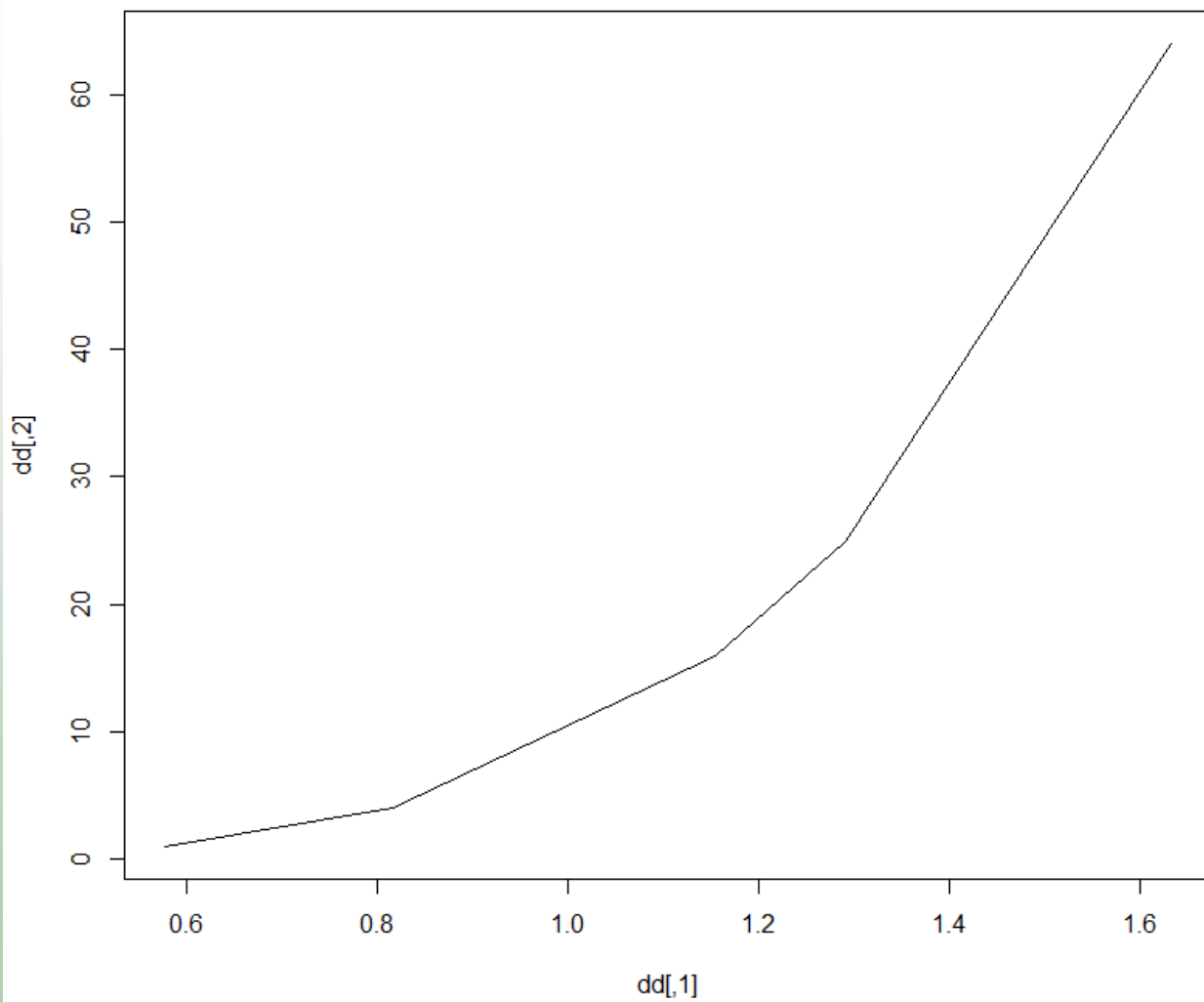
```
plot(dd, type="l", main="0 vs 0hat data=0^(1/4) smacofSym ordinal")
```

Stess-1 value: 0.0003983272

data=O^4 smacofSym ordinal

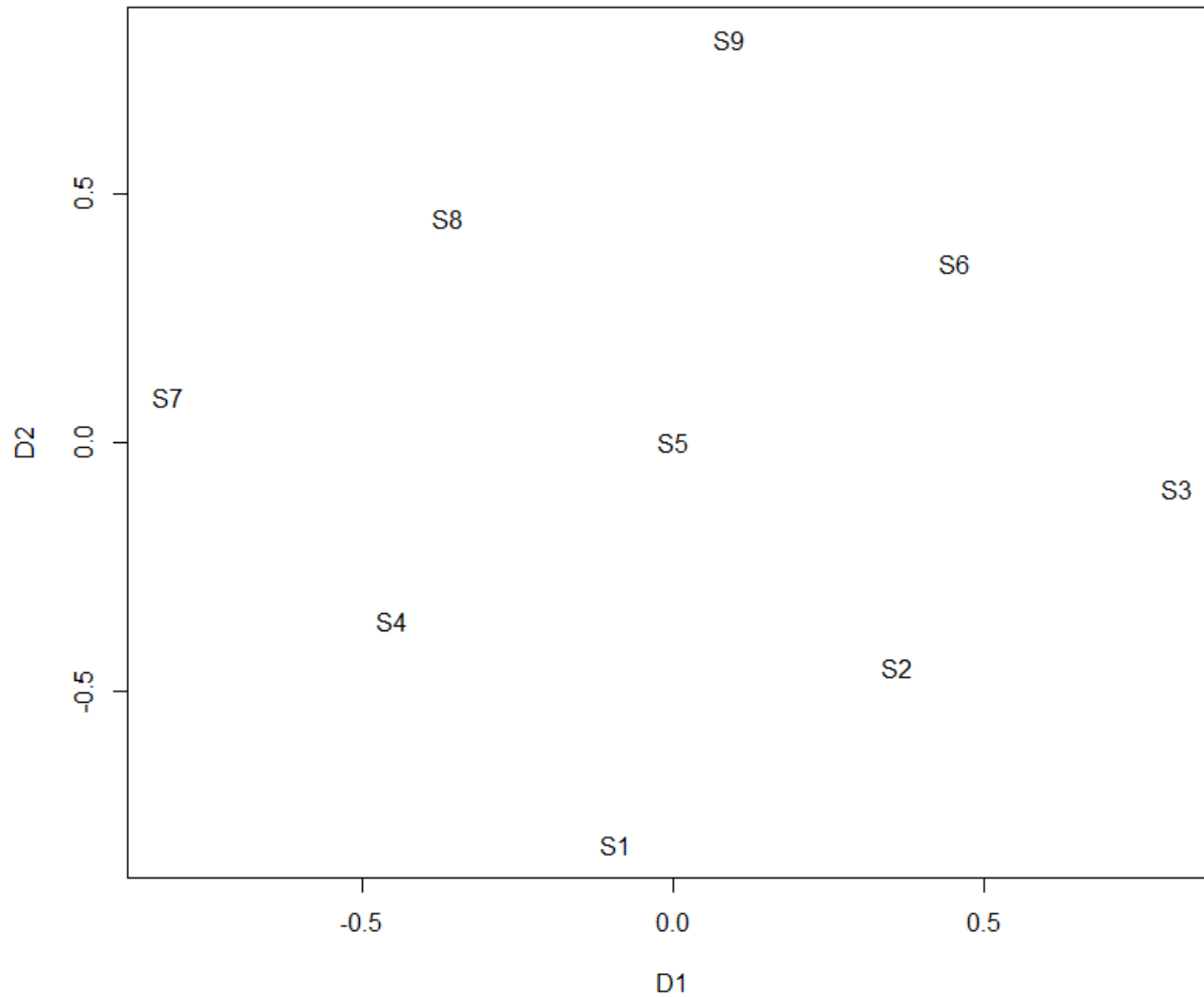


O vs Ohat data=O^4 smacofSym ordinal

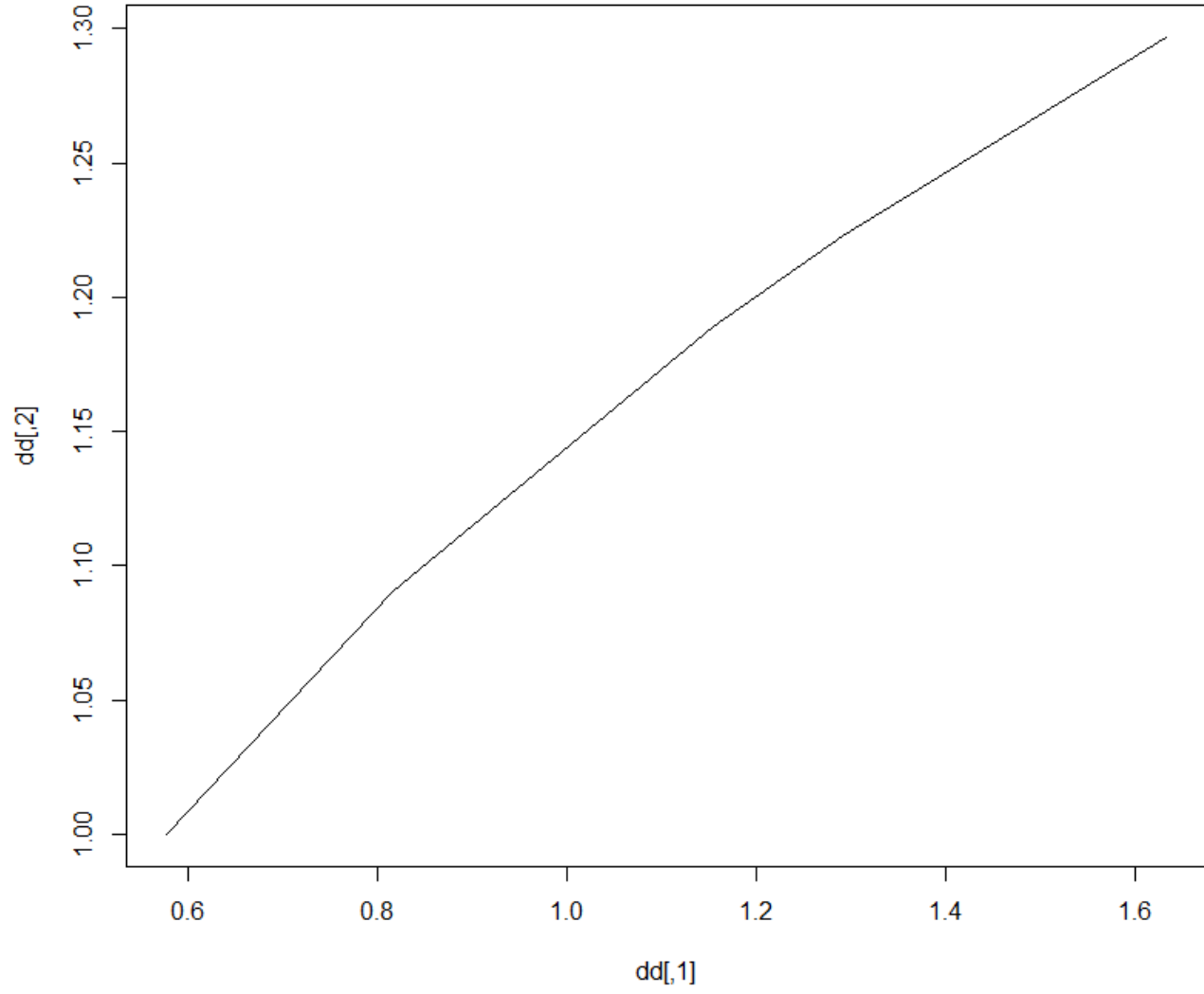


data=O^(1/4) smacofSym ordinal

Stess-1 value: 0.0005481381



O vs Ohat data=O^(1/4) smacofSym ordinal



# 個人差モデル

$$d_{ijk}^2 = \sum_{a=1}^r w_{ka} (x_{ia} - x_{ja})^2$$

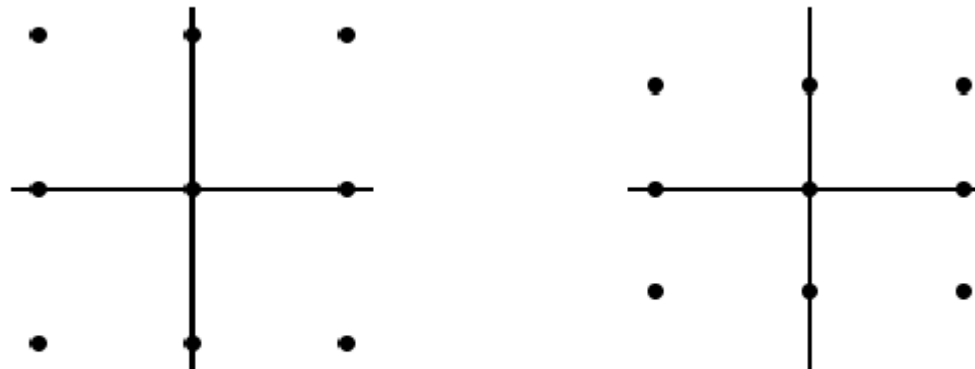


図 1: 個人差 MDS モデル [図 indclus]  
 $w_{s1} > w_{s2}$  の場合

# データ

Obs	NAMEA	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	subj
1	池袋	0.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	2.0	5.0	4.0	S1	
2	上野	5.0	0.0	1.0	2.0	4.0	4.0	5.0	5.0	4.0	4.0	S1
3	浅草	5.0	1.0	0.0	4.0	4.0	4.0	5.0	5.0	4.0	4.0	S1
4	銀座	5.0	2.0	4.0	0.0	1.0	4.0	4.0	5.0	2.0	4.0	S1
5	新橋	5.0	4.0	4.0	1.0	0.0	4.0	5.0	4.0	2.0	2.0	S1
6	品川	5.0	4.0	4.0	4.0	4.0	0.0	4.0	4.0	4.0	2.0	S1
7	渋谷	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	0.0	2.0	2.0	2.0	S1
8	新宿	2.0	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	2.0	0.0	2.0	2.0	S1
9	六本木	5.0	4.0	4.0	2.0	2.0	4.0	2.0	2.0	0.0	1.0	S1
10	赤坂	4.0	4.0	4.0	4.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.0	0.0	S1
11	池袋	0.0	4.0	4.0	4.5	5.0	4.5	2.5	2.0	4.5	4.0	S2
12	上野	4.0	0.0	1.0	4.0	3.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	S2
13	浅草	4.0	1.0	0.0	3.5	2.0	4.5	4.5	4.0	4.0	4.0	S2
14	銀座	4.5	4.0	3.5	0.0	1.0	2.0	3.5	4.0	1.0	2.0	S2
15	新橋	5.0	3.0	2.0	1.0	0.0	2.0	2.5	4.0	2.0	2.0	S2
16	品川	4.5	4.0	4.5	2.0	2.0	0.0	2.5	3.5	2.0	2.0	S2
17	渋谷	2.5	4.0	4.5	3.5	2.5	2.5	0.0	2.0	2.0	1.0	S2
18	新宿	2.0	4.0	4.0	4.0	4.0	3.5	2.0	0.0	4.0	2.0	S2
19	六本木	4.5	4.0	4.0	1.0	2.0	2.0	2.0	4.0	0.0	1.0	S2
20	赤坂	4.0	4.0	4.0	2.0	2.0	2.0	1.0	2.0	1.0	0.0	S2
21	池袋	0.0	3.0	3.0	3.0	5.0	4.0	3.0	2.0	4.0	3.0	S3



# smacof for Individual Differences

## Description

Performs smacof for individual differences also known as Three-Way smacof on a list of dissimilarity matrices. Various restrictions decompositions and restrictions on the weight matrix are provided.

## Usage

```
smacofIndDiff(delta, ndim = 2, type = c("ratio", "interval", "ordinal"),  
              constraint = c("indscale", "idioscale", "identity"),  
              weightmat = NULL, init = NULL, ties = "primary", verbose = FALSE,  
              modulus = 1, itmax = 1000, eps = 1e-6)
```

## Arguments

delta	A list of dissimilarity matrices or a list objects of class dist
ndim	Number of dimensions
type	MDS type
weightmat	Optional matrix with dissimilarity weights
init	Matrix with starting values for configurations (optional)
ties	Tie specification for non-metric MDS
constraint	Either "indscale", "idioscale", or "identity" (see details)
verbose	If TRUE, intermediate stress is printed out
modulus	Number of smacof iterations per monotone regression call
itmax	Maximum number of iterations
eps	Convergence criterion

# program

```
# read data from txt file
data=read.table("d:/Rpgm/MDS/TK0Data2.dat", header=1)
Print(data)

# rearrange data as a list
nG=21; n=10
rname=as.character(data[1:n, 2])
sname=as.character(data[seq(1, nG*n, n), n+3])
datalist=NULL
for( k in 1:nG) {
  mat=data[(n*(k-1)+1):(k*n), 3:(n+2)]
  rownames(mat)=rname
  colnames(mat)=rname
  Print(mat, digits=1)
  datalist=append(datalist, list(mat))
}
names(datalist)=sname
Print(datalist)
```

> datalist

\$\$1

	池袋	上野	浅草	銀座	新橋	品川	渋谷	新宿	六本木	赤坂
池袋	0	5	5	5	5	5	5	2	5	4
上野	5	0	1	2	4	4	5	5	4	4
浅草	5	1	0	4	4	4	5	5	4	4
銀座	5	2	4	0	1	4	4	5	2	4
新橋	5	4	4	1	0	4	5	4	2	2
品川	5	4	4	4	4	0	4	4	4	2
渋谷	5	5	5	4	5	4	0	2	2	2
新宿	2	5	5	5	4	4	2	0	2	2
六本木	5	4	4	2	2	4	2	2	0	1
赤坂	4	4	4	4	2	2	2	2	1	0

\$\$2

	池袋	上野	浅草	銀座	新橋	品川	渋谷	新宿	六本木	赤坂
池袋	0.0	4	4.0	4.5	5.0	4.5	2.5	2.0	4.5	4
上野	4.0	0	1.0	4.0	3.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4
浅草	4.0	1	0.0	3.5	2.0	4.5	4.5	4.0	4.0	4
銀座	4.5	4	3.5	0.0	1.0	2.0	3.5	4.0	1.0	2
新橋	5.0	3	2.0	1.0	0.0	2.0	2.5	4.0	2.0	2
品川	4.5	4	4.5	2.0	2.0	0.0	2.5	3.5	2.0	2
渋谷	2.5	4	4.5	3.5	2.5	2.5	0.0	2.0	2.0	1
新宿	2.0	4	4.0	4.0	4.0	3.5	2.0	0.0	4.0	2
六本木	4.5	4	4.0	1.0	2.0	2.0	2.0	4.0	0.0	1
赤坂	4.0	4	4.0	2.0	2.0	2.0	1.0	2.0	1.0	0

\$\$3

	池袋	上野	浅草	銀座	新橋	品川	渋谷	新宿	六本木	赤坂
池袋	0	3	3	3	5	4	3	2	4	3

# program

```
# load package
library(smacof)

# run smacof
res <- smacofIndDiff(datalist, constraint = "indsca1", type="ordinal")

# subject weight
Walld=res$cweights
Wall=t( sapply(Walld,colSums) )

# common stimulus configuration
X=res$gspace
rownames(X)=rname

# scaled configuration for each subject
Xall=res$conf
```

# program

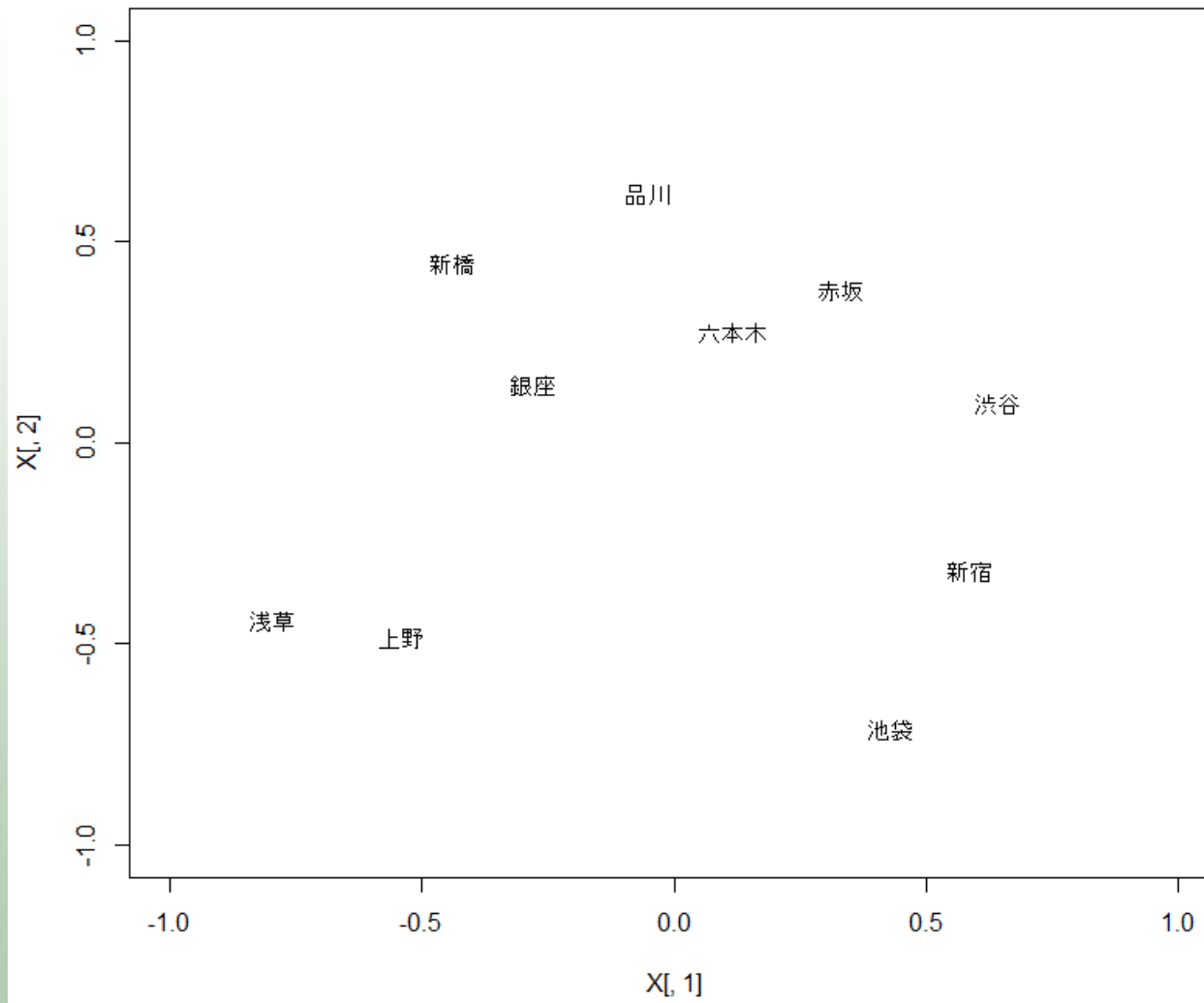
```
# plot X
plot(X[, 1], X[, 2], xlim=c(-1, 1), ylim=c(-1, 1), type="n"
      , main="common stimulus configuration")
text(X[, 1], X[, 2], rname)

# plot W
plot(Wall, xlim=c(0, 1.5), ylim=c(0, 1.5), type="n"
      , main="subject wieghts")
text(Wall, sname)

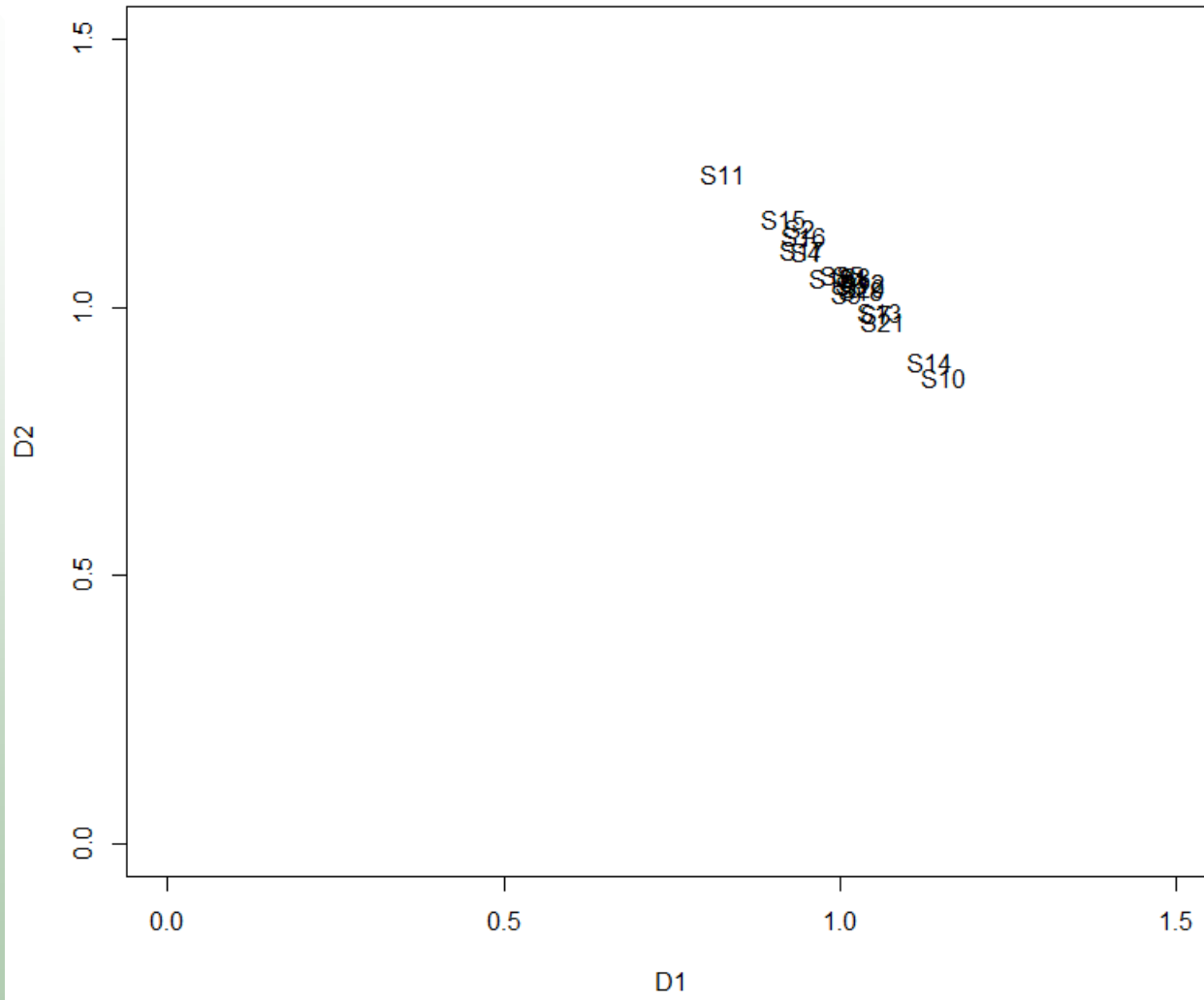
# subject # 10
plot(Xall[[10]][, 1], Xall[[10]][, 2], xlim=c(-1, 1), ylim=c(-1, 1)
      , main="subject 10")
text(Xall[[10]][, 1], Xall[[10]][, 2], rname)

# subject # 11
plot(Xall[[11]][, 1], Xall[[11]][, 2], xlim=c(-1, 1), ylim=c(-1, 1)
      , main="subject 11")
text(Xall[[11]][, 1], Xall[[11]][, 2], rname)
```

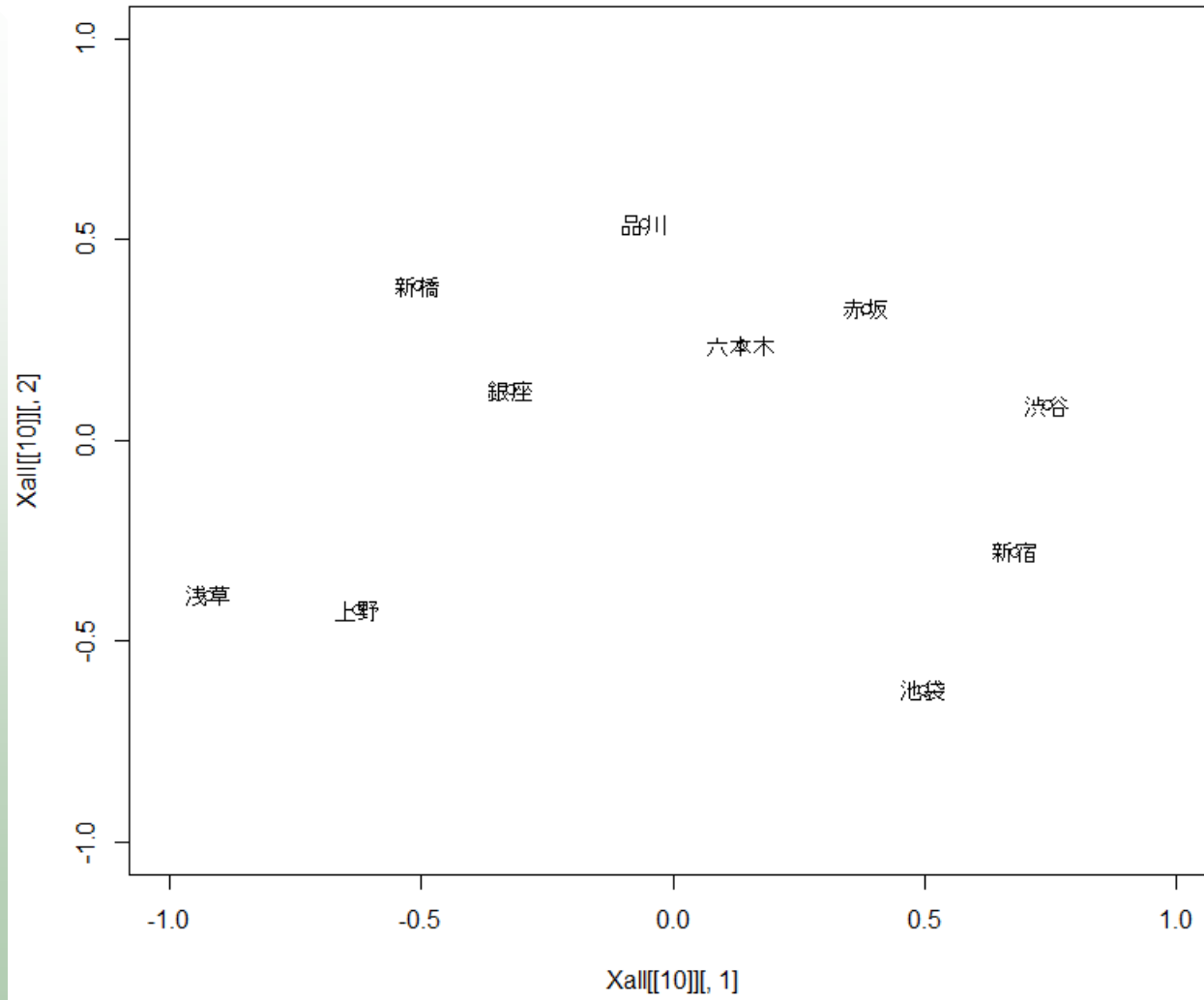
### common stimulus configuration



subject wieghts



subject 10





subject 11

