

0 確率変数に関する公式

以下の公式は $\mathcal{E}(X)$ を \bar{X} 、 $\text{var}(X)$ を S_X^2 、 $\text{Cov}(X, Y)$ を c_{XY} 、で置き換えても成り立つ。

0.1 期待値、分散、共分散等

X, Y を確率変数、 a, b を定数とする時、

$$\mathcal{E}(a) = a, \quad \text{and} \quad \text{var}(a) = 0, \quad \text{and} \quad \text{Cov}(a) = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{E}(aX + b) = a\mathcal{E}(X) + b, \quad \text{and} \quad \text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X) \quad (2)$$

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y), \quad \text{and} \quad \text{Cov}(X, X) = \text{var}(X) \quad (3)$$

0.2 確率変数の和・差

X, Y を確率変数とする。

$$\mathcal{E}(X) = \mu_X \quad \text{and} \quad \text{var}(X) = \sigma_X^2 \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(Y) = \mu_Y \quad \text{and} \quad \text{var}(Y) = \sigma_Y^2 \quad (5)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} \quad (6)$$

ならば

$$Z = X \pm Y \quad (7)$$

の時

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(X \pm Y) = \mathcal{E}(X) \pm \mathcal{E}(Y) = \mu_X \pm \mu_Y \quad (8)$$

$$\text{var}(Z) = \text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \pm 2 \text{Cov}(X, Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2 \sigma_{X,Y} \quad (9)$$

ここで、 X と Y が独立ならば、 $\sigma_{X,Y} = 0$ だから

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(X \pm Y) = \mathcal{E}(X) \pm \mathcal{E}(Y) = \mu_X \pm \mu_Y \quad (10)$$

$$\text{var}(Z) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \quad (11)$$

0.3 確率変数の変換

a, b を定数とする。 $Z = aX + b$ に関して

$$\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(aX + b) = \mathcal{E}(aX) + \mathcal{E}(b) = a\mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(b) = a\mu_X + b \quad (12)$$

$$\text{var}(Z) = \text{var}(aX + b) = \text{var}(aX) + \text{var}(b) + 2 \text{Cov}(aX, b) \quad (13)$$

$$= a^2 \text{var}(X) + 0 + 0 = a^2 \sigma_X^2 \quad (14)$$

したがって、

$$a = \frac{1}{\sqrt{\text{var}(X)}}, \quad \text{and} \quad b = -\frac{\mathcal{E}(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}} \quad (15)$$

と置くと

$$Z = \frac{X - \mathcal{E}(X)}{\sqrt{\text{var}(X)}} \quad (16)$$

であるが、

$$\mathcal{E}(Z) = 0, \quad \text{and} \quad \text{var}(Z) = 1 \quad (17)$$

となる。この操作を変数 X の標準化と呼ぶ。また、平均のみを 0 とする操作

$$Z = X - \mathcal{E}(X) \quad (18)$$

を変数 X の中心化と呼ぶ。

0.4 確率変数の重み付き和

a, b, c を定数とする。 $Z = aX + bY + c$ に関して

$$\mathcal{E}(Z) = a\mu_X + b\mu_Y + c \quad (19)$$

$$\text{var}(Z) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y) \quad (20)$$

$$= a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y), \quad \text{if independent.} \quad (21)$$

0.5 正規分布

上記の公式で、確率変数 X や Y が、指定された平均と分散を持つ正規分布をする場合、 Z もまた公式が与える平均と分散を持つ正規分布となる。

例えば、 a, b, c を定数とする。

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad \text{and} \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \quad (22)$$

ならば、 $Z = aX + bY + c$ に関して

$$Z \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{X,Y}) \quad (23)$$

$$\sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2), \quad \text{if independent.} \quad (24)$$

である。

特に、正規分布をする確率変数を標準化したものは標準正規分布をする。すなわち、

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad (25)$$

の場合、

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (26)$$

は

$$Z \sim N(0, 1) \quad (27)$$

である。このことを用いれば、

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(X - \mu_X \leq x - \mu_X) = \Pr\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (28)$$

$$= \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (29)$$

であるから、標準正規分布表を用いてこの確率を計算することが出来る。また、

$$\Pr(Z > z) = 1 - \Pr(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) \quad (30)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \text{分布が対称だから} \quad (31)$$

である。