

p-値

回帰分析

分散分析

心理・教育測定法(基礎編) A・B
木曜日 7-8限:W607

担当 前川

人間行動システム統計演習A・B
木曜日 9-10限 W607担当 前川
栗山

4月 6日	オリエンテーション	前川	1	オリエンテーション	
4月 13日	統計量の計算・相関と回帰		2	データフレームの操作	
4月 20日	統計的推測の基礎		3	ヒストグラム、クロス集計	
4月 27日	一つの母平均に関する推測		4	相関と回帰	
5月 11日	二つの母平均に関する推測		5	平均値に関する推測	
5月 18日	複数の母平均に関する推測		6	分散分析1	
5月 25日	分散分析法と回帰分析		7	分散分析2	
6月 1日	まとめ		8	まとめ	
6月 15日	イントロ		1	イントロ	
6月 22日	多次元尺度法による個体の分類		2	多次元尺度法	
6月 29日	クラスター分析による個体の分類		3	クラスター分析	栗山
7月 6日	回帰分析		4	回帰分析	
7月 13日	因子分析		5	因子分析	
7月 21日	共分散分析と構造方程式モデル	栗山	6	共分散分析と構造方程式モデル	栗山
7月 27日	その他の方法		7	その他の方法	
8月 4日	まとめ		8	まとめ	

p-値を使った仮説検定

p-値

帰無仮説の下で、検定統計量 T が、実際に観測された統計量 t よりも極端な値を取る確率。

p-値とは、観測された統計量 t が、帰無仮説の下で、どれほど起きにくい値かを示す量。

$$Pr(T < t) \quad \text{or} \quad Pr(T > t) \\ 2 \times \min(Pr(T < t), Pr(T > t))$$

帰無仮説の起こりにくさを表す量ではない。

p-値の例

$z = 1.95$ を観測したとする。

$$Pr(Z < z) = .9744 \quad \text{and} \quad Pr(Z > z) = .0256$$

したがって

$$p\text{-値} = 2 \times 0.0256 = 0.0512$$

回帰分析

単一の連続的な変数 Y (従属変数、基準変数、被説明変数) を一つ、または、複数の変数群 X (独立変数、説明変数、予測変数)、で説明する方法。

一般的な回帰曲線の定義は、説明変数 X を与えた時の基準変数 Y の条件付き期待値 $E(Y|X)$ の描く曲線 (曲面) のこと。この曲線が、直線 (平面) であると仮定したものが、以下に示す回帰分析である。

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{単回帰分析} \quad (44)$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i \quad \text{重回帰分析 (説明変数ふたつ)} \quad (45)$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \quad \text{重回帰分析 (一般形)} \quad (46)$$

ただし、

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (47)$$

また、誤差を除いた部分、すなわち、 X を与えた時の Y の期待値の部分

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j x_{ij} \quad (48)$$

を予測値と呼ぶ。

回帰係数の推定

単回帰分析の場合、回帰係数の推定値は

$$\hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{var}(X)} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

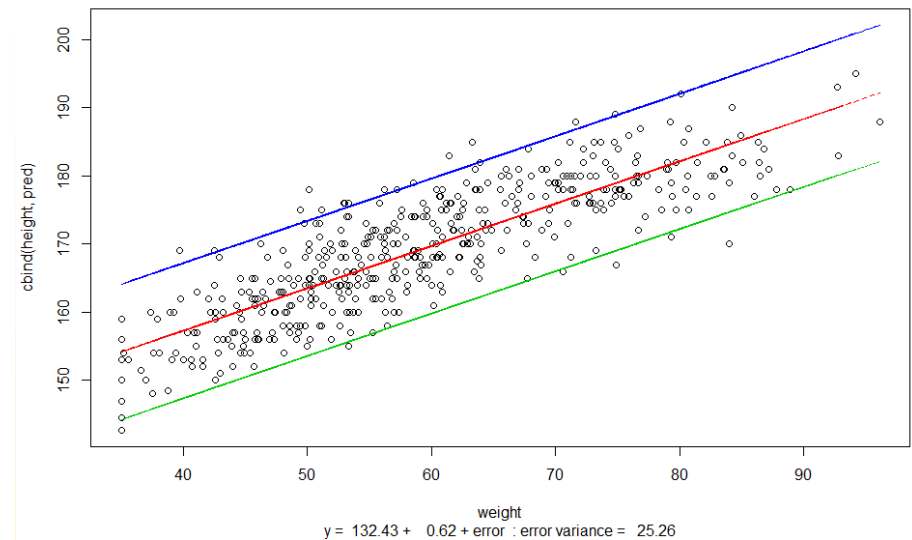
となり、一般的には

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

となる。

単回帰分析の例

plot of data, fitted line, and 95% prediction interval



R の lm での計算

9

```
reslm=lm(height~weight)
summary(reslm)
```

```
Call:
lm(formula = height ~ weight)
```

```
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.6311  -3.3614  -0.3601   3.5114  14.4364
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 132.42862    1.09250  121.22  <2e-16 ***
weight       0.62146    0.01803   34.47  <2e-16 ***
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
Residual standard error: 5.026 on 462 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.72, Adjusted R-squared: 0.7194
F-statistic: 1188 on 1 and 462 DF, p-value: < 2.2e-16
```

R の lm での計算

10

```
reslm=lm(height~weight+gender)
summary(reslm)
```

```
Call:
lm(formula = height ~ weight + gender)
```

```
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.9961  -3.2455  -0.1968   3.2379  12.6228
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 137.96419    1.29328  106.677  < 2e-16 ***
weight       0.52363    0.02189   23.917  < 2e-16 ***
gender1      -2.04695    0.28557  -7.168  0.00000000000304 ***
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
Residual standard error: 4.772 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7481, Adjusted R-squared: 0.747
F-statistic: 684.6 on 2 and 461 DF, p-value: < 2.2e-16
```

回帰モデルの行列表記

11

$$y = X\beta + \varepsilon$$
$$= \hat{y} + \varepsilon, \quad \hat{y} = X\beta$$

$y \rightarrow n \times 1$ 基準変数
 $X \rightarrow n \times (q+1)$ 説明変数 + 1
 $\beta \rightarrow (q+1) \times 1$ 回帰係数 (切片を含む)
 $\hat{y} \rightarrow X\beta = n \times 1$ モデルの予測値

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_{21} \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nq} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q x_{ij}\beta_j + \varepsilon_{ij}$$

回帰分析

12

● モデルの当てはまりの悪さの指標 RSS

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i$$

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j x_{ij}$$

残差の 2 乗和

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

分散説明率・決定係数・R²

$$R^2 = \frac{\text{var}(\hat{Y})}{\text{var}(Y)}$$

回帰係数の検定

13

統計的仮定：誤差項は正規分布（平均は 0、分散は共通）

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^q x_{ij}\beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

仮説検定

$$H_0: \beta_{(1)} = \beta_{(2)} = \dots = \beta_{(r)} = 0$$

H_1 : 上記の制約がない

検定統計量

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS_1) / r}{RSS_1 / (N - q - 1)} \quad F \sim F(r, N - q - 1)$$

回帰係数の検定

14

$$RSS_k = \sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{y}_{(k)_i})^2, \quad k = 0 \text{ or } 1$$

RSS_0 は H_0 で 0 と指定された回帰係数に対応する説明変数を X 行列から除いて回帰係数を推定した時の残差の 2 乗和。

その時の予測値が $\widehat{y}_{(0)_i}$ 。

また、 RSS_1 は全ての説明変数を用いて計算した残差の 2 乗和で、その時の予測値が $\widehat{y}_{(1)_i}$ 。

$RSS_1 = \sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{y}_i)^2$ を誤差平方和 (error SS)、 $RSS_0 - RSS_1$ を回帰平方和 (model SS)。

$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$ を全平方和 (total SS) と呼ぶ。

全ての回帰係数が 0 ($r = q$)

15

これは H_0 が切片を除くすべての回帰係数が 0 という $r=q$ 個の制約の場合

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N (\widehat{y}_i - \bar{y})^2 / q}{\sum_{i=1}^N (y_i - \widehat{y}_i)^2 / (N - q - 1)}$$

となる。ただし \widehat{y}_i は H_1 の下での予測値、 \bar{y} は H_0 の下での予測値である。

一つの回帰係数が 0 ($r = 1$)

16

一つの回帰係数 $\beta_{(1)}$ のみが 0 という $r=1$ 個の制約の場合も同様の F 検定 (第 1 自由度 2 自由度 $N - q - 1$) が使えるが、

通常は、それと同値の t 検定 (自由度 $N - q - 1$) を用いる:

$$F \sim F(df1, df2) \rightarrow t = \sqrt{F} \sim t(df2)$$

R の Im の出力

17

```
*** Summary of lm with height~weight+gender
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	137.96419	1.29328	106.677	< 2e-16 ***
weight	0.52363	0.02189	23.917	< 2e-16 ***
gender1	-2.04695	0.28557	-7.168	0.00000000000304 ***

```
---  
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 4.772 on 461 degrees of freedom  
Multiple R-squared:  0.7481,    Adjusted R-squared:  0.747  
F-statistic: 684.6 on 2 and 461 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
Anova Table (Type III tests)          summary (Anova (reslm1, type= "III" ))
```

```
Response: height
```

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
(Intercept)	259164	1	11380.07	< 2.2e-16 ***
weight	13027	1	572.02	< 2.2e-16 ***
gender	1170	1	51.38	0.000000000003043 ***
Residuals	10499	461		

RSS の差による検定 gender

18

```
Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
```

```
number of observations = 464
```

```
model1 under H1 (full model):  # of params = 2
```

```
height~weight+gender
```

```
RSS1 = 10498.57    error df = 461
```

```
model0 under H0 (constrained model):  # of params = 1
```

```
height~weight
```

```
RSS0 = 11668.67    error df = 462
```

```
RSS0-RSS1 = 1170.103    dfm1-dfm0 = 1
```

```
F = ( (RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0) ) / ( RSS1/df1 ) = 51.38012
```

```
df1 = dfm1-dfm0 = 1    df2 = dfe1 = 461
```

```
p-value = 0.000000000003042658
```

```
critical value of F = 2.71645    3.861709
```

```
t = sqrt(F) = 7.167993
```

```
df1 = dfe1 = 461
```

```
p-value = 0.000000000001521329
```

```
critical value of t = 1.648166    1.965123
```

RSS の差による検定 weight

19

```
Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
```

```
number of observations = 464
```

```
model1 under H1 (full model):  # of params = 2
```

```
height~weight+gender
```

```
RSS1 = 10498.57    error df = 461
```

```
model0 under H0 (constrained model):  # of params = 1
```

```
height~gender
```

```
RSS0 = 23525.49    error df = 462
```

```
RSS0-RSS1 = 13026.93    dfm1-dfm0 = 1
```

```
F = ( (RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0) ) / ( RSS1/df1 ) = 572.0223
```

```
df1 = dfm1-dfm0 = 1    df2 = dfe1 = 461
```

```
p-value = 8.476723e-83
```

```
critical value of F = 2.71645    3.861709
```

```
t = sqrt(F) = 23.91699
```

```
df1 = dfe1 = 461
```

```
p-value = 4.238362e-83
```

```
critical value of t = 1.648166    1.965123
```

分散分析

20

● 一元配置の ANOVA

$$y_{ij} = \hat{y}_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \hat{y}_{ij} = \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, A$$

これを線形モデル $\hat{y} = X\beta$ の形で書くと

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{11} \\ \hat{y}_{21} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_11} \\ \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{22} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1A} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_{AA}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_A \end{pmatrix}$$

ただし、 μ_j は、第 j 群で観測される $y_{ij}, i = 1, 2, \dots, n_j$ の母平均

水準の効果パラメタ

この同じモデルを、以下のように書き表すことも出来る。ただし、 μ は全水準の平均を表す母数、 α_j は第 j 水準の効果 (effect) を表す母数である。

$$y_{ij} = \hat{y}_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \hat{y}_{ij} = \mu + \alpha_j, \quad i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, A$$

である。これを線形モデル $\hat{y} = X\beta$ の形で書くと

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{11} \\ \hat{y}_{21} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_11} \\ \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{22} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1A} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_{AA}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_A \end{pmatrix}$$

母平均と効果パラメタ

しかし、このデザイン行列は、その第 2 列目から最後までを加えると第 1 列目の単位ベクトルとなる。このように、行列のある列が、残りの列の線形結合として表されるような場合にその行列の各列は 1 次独立ではない (1 次従属である) と言う。そして、その場合、 $(X'X)^{-1}$ は存在しない。従って、パラメタ β の推定値は一意には定まらない。

そこで、通常は、効果の和が 1 であるという制約条件

$$\sum_{j=1}^A \alpha_j = 0$$

をもちいて、母数の数を一つ減らすことを考える。

$$\hat{y}_{ij} = \mu_j \quad \text{and} \quad \hat{y}_{ij} = \mu + \alpha_j, \quad \sum_{j=1}^A \alpha_j = 0$$

$$\mu = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mu_j \quad (\text{母平均の平均})$$

$$\alpha_j = \mu_j - \mu \quad (\text{母平均の } \mu \text{ からのズレ})$$

制約付きのデザイン行列

$$\sum_{j=1}^A \alpha_j = 0$$

$$\alpha_A = -\sum_{j=1}^{A-1} \alpha_j$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{11} \\ \hat{y}_{21} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_11} \\ \hat{y}_{12} \\ \hat{y}_{22} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1A} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_{AA}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{A-1} \end{pmatrix}$$

R の lm での計算

*** Summary of lm with height~genre
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	169.2012	0.4650	363.837	< 2e-16 ***
genre1	-0.7845	0.5835	-1.344	0.17945
genre2	-1.9194	0.7272	-2.640	0.00858 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9.337 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.0357, Adjusted R-squared: 0.03152
F-statistic: 8.535 on 2 and 461 DF, p-value: 0.0002293

Anova Table (Type III tests)
Response: height

	Sum Sq	Df	F value	Pr(>F)
(Intercept)	11541141	1	132377.0658	< 2.2e-16 ***
genre	1488	2	8.5345	0.0002293 ***
Residuals	40192	461		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

RSS の差による検定 genre

Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
 number of observations = 464

model1 under H1 (full model): # of params = 2
 height~genre

RSS1 = 40191.75 error df = 461

model0 under H0 (constrained model): # of params = 0
 height~1

RSS0 = 41679.9 error df = 463

RSS0-RSS1 = 1488.149 dfm1-dfm0 = 2

F = ((RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0)) / (RSS1/dfe1) = 8.534546

df1 = dfm1-dfm0 = 2 df2 = dfe1 = 461

p-value = 0.000229332

critical value of F = 2.314124 3.015284

ANOVA table

分散分析表

source	SS	df	MS	EMS	F
A	SS_A	df_A	$\frac{SS_A}{df_A}$	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_{j=1}^A n_j \alpha_j^2}{A-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$
error	SS_{error}	df_{error}	$\frac{SS_{error}}{df_{error}}$	σ_e^2	
total	SS_{total}	df_{total}			

二元配置

$$y_{ijk} = \hat{y}_{ijk} + \varepsilon_{ijk}, \quad \hat{y}_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k,$$

$$i = 1, 2, \dots, n_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, A \quad k = 1, 2, \dots, B$$

全ての n_{ij} を 1 とした場合のデザイン行列

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{111} \\ \hat{y}_{112} \\ \vdots \\ \hat{y}_{11B} \\ \hat{y}_{121} \\ \hat{y}_{122} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1A1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1AB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_A \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_B \end{pmatrix}$$

制約付きデザイン行列

制約条件 $\sum_{j=1}^A \alpha_j = 0, \sum_{k=1}^B \beta_k = 0$ を入れると

$$\alpha_A = -\sum_{j=1}^{A-1} \alpha_j \quad \beta_B = -\sum_{k=1}^{B-1} \beta_k$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{111} \\ \hat{y}_{112} \\ \vdots \\ \hat{y}_{11B} \\ \hat{y}_{121} \\ \hat{y}_{122} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1A1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{1AB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{A-1} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{B-1} \end{pmatrix}$$

交互作用

交互作用のパラメタ $\alpha\beta_{jk}$ に対応する

デザイン行列の列を、 α_j と β_k に対応する X の2つの列 $x_{(1+j)}, x_{(1+A+k)}$ の要素毎の積を要素として持つベクトルとして定義

$A = 2, B = 3$ の場合

$$y = \begin{pmatrix} y \\ y_{111} \\ y_{112} \\ y_{113} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{123} \end{pmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \mu & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \alpha\beta_{11} \\ \alpha\beta_{12} \end{pmatrix}$$

交互作用の意味

$$\sum_{j=1}^A \alpha\beta_{jk} = \sum_{k=1}^B \alpha\beta_{jk} = 0$$

$$\mu = \frac{1}{AB} \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \mu_{jk} \quad (\text{母平均の平均})$$

$$\alpha_j = \mu_{j.} - \mu \quad (\text{行平均の } \mu \text{ からのズレ})$$

$$\beta_k = \mu_{.k} - \mu \quad (\text{列平均の } \mu \text{ からのズレ})$$

$$\alpha\beta_{jk} = \mu_{jk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k) \quad (\text{加算モデルからのズレ})$$

ただし、

$$\mu_{j.} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \mu_{jk}, \quad (\text{行平均}) \quad \mu_{.k} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mu_{jk} \quad (\text{列平均})$$

		要因 B (k)				
		水準 1	水準 2	水準 3	水準 B	
要因 A (j)	水準 1	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{1B}	$\mu_{1.}$
	水準 2	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{2B}	$\mu_{2.}$
	水準 A	μ_{A1}	μ_{A2}	μ_{A3}	μ_{AB}	$\mu_{A.}$
		$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{.3}$	$\mu_{.B}$	μ

$$\mu = \frac{1}{AB} \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \mu_{jk} \quad \mu_{j.} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \mu_{jk}, \quad (\text{行平均}) \quad \mu_{.k} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mu_{jk} \quad (\text{列平均})$$

$$\alpha_j = \mu_{j.} - \mu$$

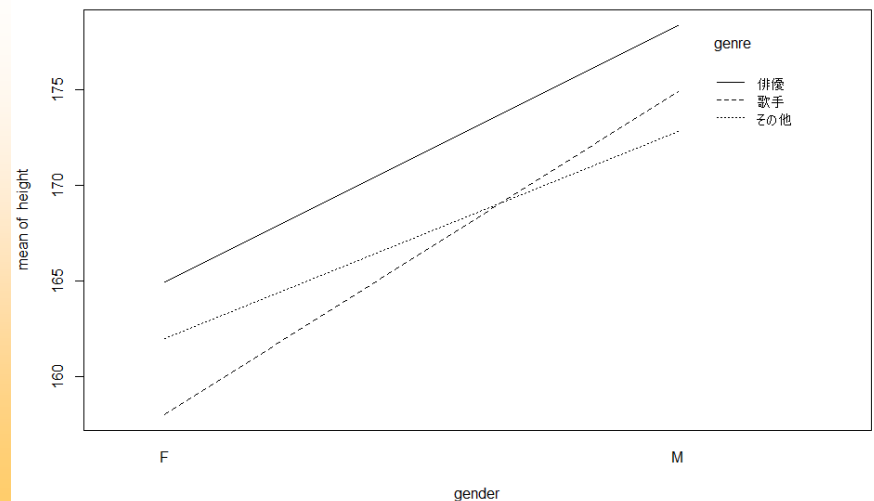
$$\beta_k = \mu_{.k} - \mu$$

$$\alpha\beta_{jk} = \mu_{jk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k) = \mu_{jk} - \mu_{j.} - \mu_{.k} + \mu$$

(交互作用は加算モデルからのズレを表している。)

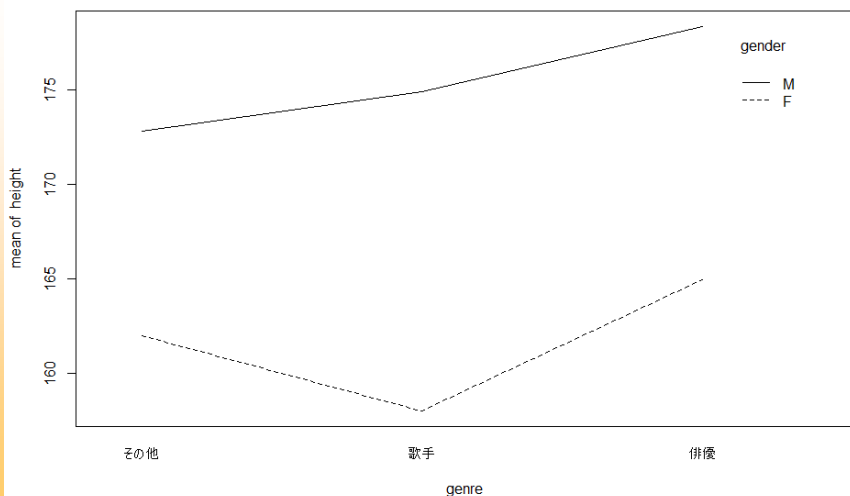
交互作用の図示

`interaction.plot(gender, genre, height ~ "gender + genre")`



交互作用の図示

interaction.plot(genre, gender, height, main="height ~ genre + gender")



R の lm での計算

```
*** Summary of lm with height~gender+genre+gender*genre
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  168.5074    0.3379  498.688 < 2e-16 ***
gender1      -6.8595    0.3379 -20.300 < 2e-16 ***
genre1       -1.1088    0.4258  -2.604 0.009520 **
genre2       -2.0442    0.5280  -3.872 0.000124 ***
gender1:genre1  1.4452    0.4258   3.394 0.000750 ***
gender1:genre2 -1.5989    0.5280  -3.028 0.002597 **
---
Residual standard error: 6.744 on 458 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5002,    Adjusted R-squared:  0.4948
F-statistic: 91.68 on 5 and 458 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
***Anova of lm
Anova Table (Type III tests)
Response: height
              Sum Sq Df F value    Pr(>F)
(Intercept) 11310897 1 248689.8276 < 2.2e-16 ***
gender       18743   1  412.1063   < 2.2e-16 ***
genre        2023   2  22.2346 0.000000006083 ***
gender:genre  622   2   6.8407   0.001182 **
Residuals   20831 458
```

RSS の差による検定 gender*genre 35

Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
number of observations = 464

model1 under H1 (full model): # of params = 5 (+ 1 for intercept)
height~gender+genre+gender*genre
RSS1 = 20830.73 error df = 458

model0 under H0 (constrained model): # of params = 3 (+ 1 for intercept)
height~gender+genre
RSS0 = 21452.99 error df = 460

RSS0-RSS1 = 622.2573 dfm1-dfm0 = 2
F = ((RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0)) / (RSS1/dfe1) = **6.840707**
df1 = dfm1-dfm0 = 2 df2 = dfe1 = 458
p-value = 0.001182028
critical value of F = 2.3142 3.015413

RSS の差による検定 genre 36

Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
number of observations = 464

model1 under H1 (full model): # of params = 5 (+ 1 for intercept)
height~gender1+genre1+genre2+gender1.genre1+gender1.genre2
RSS1 = 20830.73 error df = 458

model0 under H0 (constrained model): # of params = 3 (+ 1 for intercept)
height~gender1+gender1.genre1+gender1.genre2
RSS0 = 22853.27 error df = 460

RSS0-RSS1 = 2022.543 dfm1-dfm0 = 2
F = ((RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0)) / (RSS1/dfe1) = **22.23457**
df1 = dfm1-dfm0 = 2 df2 = dfe1 = 458
p-value = 0.000000006083355
critical value of F = 2.3142 3.015413

RSS の差による検定 gender 37

Testing Hypothesis using the Reduction of RSS
 number of observations = 464

model1 under H1 (full model): # of params = 5 (+ 1 for intercept)
 height ~ gender1+genre1+genre2+gender1.genre1+gender1.genre2
 RSS1 = 20830.73 error df = 458

model0 under H0 (constrained model): # of params = 4 (+ 1 for intercept)
 height ~ genre1+genre2+gender1.genre1+gender1.genre2
 RSS0 = 39574.13 error df = 459

RSS0-RSS1 = 18743.4 dfm1-dfm0 = 1
 $F = ((RSS0-RSS1)/(dfm1-dfm0)) / (RSS1/dfe1) = 412.1063$
 df1 = dfm1-dfm0 = 1 df2 = dfe1 = 458
 p-value = 8.102864e-66
 critical value of F = 2.716522 3.861842
 t = sqrt(F) = 20.3004
 df1 = dfe1 = 458
 p-value = 4.051432e-66
 critical value of t = 1.648187 1.965157

ANOVA table 38

(全ての n_{jk} が等しい、バランスが取れている、直交している場合)

分散分析表

source	SS	df	MS	EMS	F
A	SS_A	df_A	$\frac{SS_A}{df_A}$	$\sigma_e^2 + \frac{nB \sum_{j=1}^A \alpha_j^2}{A-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$
B	SS_B	df_B	$\frac{SS_B}{df_B}$	$\sigma_e^2 + \frac{nA \sum_{k=1}^B \beta_k^2}{B-1}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$
AB	SS_{AB}	df_{AB}	$\frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$	$\sigma_e^2 + \frac{n \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \alpha \beta_{ij}^2}{(A-1)(B-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_e}$
error	SS_{error}	df_{error}	$\frac{SS_{error}}{df_{error}}$	σ_e^2	
total	SS_{total}	df_{total}			