

母分散が未知の場合の仮説検定

平均値の信頼区間

平均値の差の検定

多群の場合：分散分析

心理・教育測定法(基礎編) A・B  
木曜日 7-8限:W607

担当 前川

人間行動システム統計演習A・B  
木曜日 9-10限 W607

担当 前川  
栗山

4月 6日	オリエンテーション	前川	1	オリエンテーション	
4月 13日	統計量の計算・相関と回帰		2	データフレームの操作	
4月 20日	統計的推測の基礎		3	ヒストグラム、クロス集計	
4月 27日	一つの母平均に関する推測		4	相関と回帰	
5月 11日	二つの母平均に関する推測		5	平均値に関する推測	
5月 18日	複数の母平均に関する推測		6	分散分析1	
5月 25日	分散分析法と回帰分析		7	分散分析2	
6月 1日	まとめ		8	まとめ	
6月 15日	イントロ		1	イントロ	
6月 22日	多次元尺度法による個体の分類		2	多次元尺度法	
6月 29日	クラスター分析による個体の分類		3	クラスター分析	栗山
7月 6日	回帰分析		4	回帰分析	
7月 13日	因子分析		5	因子分析	
7月 21日	共分散分析と構造方程式モデル	栗山	6	共分散分析と構造方程式モデル	栗山
7月 27日	その他の方法		7	その他の方法	
8月 4日	まとめ		8	まとめ	

仮説検定

母分散が未知の場合

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad iid$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\beta = \Pr(Z \leq z_\beta)$$

(両側検定の場合は  $\beta = \alpha/2$  とする。)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\bar{X} \sim t(\mu, s/\sqrt{n}, n-1) \quad \text{こう書くことはあまり無い。}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\beta = \Pr(T \leq t_{\beta, n-1})$$

## 母平均の信頼区間

## 母平均の信頼区間

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

ならば

$$\Pr(\mu - z_{\alpha/2} \times \sigma < X < \mu + z_{1-\alpha/2} \times \sigma) = 1 - \alpha$$

である。これを变形すると

$$\Pr(X - z_{\alpha/2} \times \sigma < \mu < X + z_{1-\alpha/2} \times \sigma) = 1 - \alpha$$

したがって、

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

を用いると、

$$\Pr\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

を得る。これを母平均の  $100 \times (1 - \alpha) \%$  の信頼区間と呼ぶ。

## 母平均の信頼区間

母分散が未知の場合には、自由度  $n - 1$  の  $t$  分布の分位点  $t_{\alpha/2, n-1}$  と  $t_{1-\alpha/2, n-1}$  を用いて

$$\Pr\left(\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\alpha/2, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

一般に、正規分布や  $t$  分布は対称であるため

$$z_{\beta} = -z_{1-\beta} \quad \text{and} \quad t_{\beta, df} = -t_{1-\beta, df}$$

である。

## 母平均の信頼区間

- データから大きさ  $n$  のサンプルを取り信頼区間を計算することを  $m$  回繰り返せば、それらの区間のうち  $100 \times (1 - \alpha) \%$  は、真の平均値の値  $\mu$  を含むはずである。
- 区間の両端が分布する。  
 $\mu$  は未知の定数。

## 信頼区間と仮説検定

9

- 帰無仮説を表す  $\mu_0$  が信頼区間に入っているならば、帰無仮説を保持、入っていないならば帰無仮説を棄却する。
- 両側検定の場合、信頼係数と有意水準は同じ  $\alpha$ 。
- $\alpha$  を小さくすると区間は長くなる。
- $n$  を大きくすると区間は短くなる。

10

## 2群の母平均の差の検定

## 母分散が既知で等しい場合

11

### ● データの分布

$$X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2 \quad iid$$

### ● 検定仮説（両側検定）

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ふたつ母平均 } \mu_1, \mu_2 \text{ は等しい。}$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ふたつ母平均等しくない。}$$

### ● 検定統計量の分布

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1) \quad \text{and} \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$$

## 母分散が既知で等しい場合

12

### ● 検定統計量の分布

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1) \quad \text{and} \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2)$$

$$\sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

したがって

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0, 1)$$

## 母分散が既知で等しい場合

13

### ● 検定統計量の分布

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim N(0, 1)$$

### ● 帰無仮説は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

### ● したがって

$$\text{棄却域} \quad Z < z_{\alpha/2} \quad \text{or} \quad Z > z_{1-\alpha/2}$$

$$\text{すなわち} \quad |Z| > z_{1-\alpha/2}$$

の時に帰無仮説を棄却。(差があるという結論)

## 母分散が未知で等しい場合

14

### ● 検定統計量の分布

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

ただし、ふたつのサンプルのデータをまとめて（プールして）推定した  $\sigma^2$  の推定値を

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left( \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{i2} - \bar{X}_2)^2 \right)$$

## 母分散が未知で等しい場合

15

検定統計量

平均値の差の  $t$  検定

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left( \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{i2} - \bar{X}_2)^2 \right)$$

$$\text{棄却域} \quad T < t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \quad \text{or} \quad T > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

すなわち

$$|T| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

の時に帰無仮説を棄却。(差があるという結論)

## 母分散が既知で等しく無い場合

16

### ● データの分布

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1) \quad \text{and} \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

### ● 検定仮説（両側検定）

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ふたつ母平均 } \mu_1, \mu_2 \text{ は等しい。}$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{ふたつ母平均等しくない。}$$

### ● 検定統計量の分布

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

これらの  $\sigma_1, \sigma_2$  を標本標準偏差  $s_1, s_2$  で置き換えたものは  $t$  分布をしない。

検定統計量

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$$

Welch の (自由度の) 補正

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

棄却域  $T < t_{\alpha/2, \nu}$       or       $T > t_{1-\alpha/2, \nu}$   
 すなわち  $|T| > t_{1-\alpha/2, \nu}$   
 の時に帰無仮説を棄却。(差があるという結論)

## 母平均の差の信頼区間

## 母平均の差の信頼区間

$$\Pr\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left( \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{i2} - \bar{X}_2)^2 \right)$$

$$\Pr\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{\alpha/2, \nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\alpha/2, \nu} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

## 母平均の差の信頼区間

- 母平均の差の信頼区間が 0 を含めば 帰無仮説を保持 (差が無い)、 0 を含まなければ、棄却 (差がある)。
- 実際にどの程度差があるかを知ることが出来る。

## 3群の平均値の差の検定

母集団が三つ以上になった場合、t 検定は使わない。

その理由は第 1 種の過誤の確率をコントロールできないからである。

いま、三つの母集団があり、その平均を  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  とする。数学的には  $\mu_1 = \mu_2, \mu_2 = \mu_3$  が  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  を意味するので、検定仮説として次の二つを考える。

$$\begin{aligned} H_{01} : \mu_1 &= \mu_2 \\ H_{11} : \mu_1 &\neq \mu_2 \end{aligned} \quad (40)$$

and

$$\begin{aligned} H_{02} : \mu_2 &= \mu_3 \\ H_{12} : \mu_2 &\neq \mu_3 \end{aligned} \quad (41)$$

それぞれの仮説を有意水準  $\alpha$  で検定すると、二つの検定で少なくとも一つの type I error を起こす確率は、これらの仮説が独立であるとしても、 $1 - (1 - \alpha)^2 \approx 2\alpha$  となる。独立でない場合はどうなるか解らない。

一般的に、母集団が  $p$  個あり、 $p - 1$  個の仮説群の検定を行った場合、それらが独立の場合には全体としての type I error の確率 (少なくとも一つの type I error を起こす確率) は  $1 - (1 - \alpha)^{p-1} \approx (p - 1)\alpha$  となる。

## 3群以上の平均値の差の検定

一般的に  $p$  個の母集団があり、母分散は共通であると仮定できる場合、

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p \quad (\text{すべての母平均は等しい}) \quad (42)$$

$$H_1 : \text{not } H_0 \quad (\text{少なくとも一つの母平均は他とことなる}) \quad (43)$$

を適切な検定統計量を用いて有意水準  $\alpha$  で検定することになる。(通常は  $\sigma$  の値を未知として、F 統計量を用いる。)

このような手法を (一元配置の) 分散分析と呼ぶ。

## 分散分析

## 用語

- 要因 (因子) factor  
実験結果に影響を与えると考えるもの。(名義尺度の説明変数)
- 水準 level  
要因として用いられた変数の値
- 処理 treatment  
要因の各水準の組み合わせ
- 効果 effect 各要因の各水準の効果を数値化したもの
- 実験計画 design of experiment, n 元配置デザイン  
n は要因の数
- 被験者間要因 between subject factor、被験者内要因 within subject factor  
その要因の各水準が異なる被験者に割り当てられるか否か。  
被験者内要因は繰り返し測定、反復測定、対応のある測定、対比較とも呼ばれる。
- 繰り返し  
各処理の下での測定数。

- 平方和 Sum of Squares (SS)、平均平方等 Mean Square (MS)  
F 統計量を計算するために使われる統計量で、平均平方は平方和を対応する自由度で割ったもの。  
F 統計量は平均平方の比となる。
- 自由度 degrees of freedom  
平均平方の分母で、主効果の自由度は要因の水準の数 - 1。
- 平方和、自由度の分解  
恒等式による平方和等の加算的分解。
- 主効果 main effect、交互作用 interaction effect
- 固定効果 (母数モデル) fixed effect、変量効果 (変量モデル) random effect
- 線形モデル linear model, 加算モデル additive model
- crossed, nested factors
- 多重比較 multiple comparison
- フィッシャーの3原則 (反復、無作為化、局所管理)
- 制御因子、標示因子、ブロック因子

## 1 元配置 = 3群以上の平均値の差の検定<sup>27</sup>

### 8.2 1元配置分散分析

要因 A				
水準 1	水準 2	水準 3	水準 A	
$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_A$	$\mu$

#### 8.2.1 モデル

$$Y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$$

$$= \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

ただし

$$\mu = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mu_j \quad \text{or} \quad \mu = \frac{1}{\sum_{j=1}^A n_j} n_j \mu_j$$

$$\alpha_j = \mu_j - \mu$$

#### 8.2.2 検定仮説

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_A$$

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_A = 0$$

## 1 元配置 = 3群以上の平均値の差の検定<sup>28</sup>

### 8.2.3 データ、自由度、平方和の分解

$$Y_{ij} - \mu = \mu_j - \mu + Y_{ij} - \mu_j$$

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{.j} = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..} + Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$$

$$\sum_{j=1}^A \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^A n_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{j=1}^A \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$$

$$SS_{total} = SS_A + SS_{error}$$

$$= SS_{between} + SS_{within}$$

$$\sum_{j=1}^A n_j - 1 = A - 1 + \sum_{j=1}^A n_j - A$$

$$df_{total} = df_A + df_{error}$$

$$= df_{between} + df_{within}$$

### 8.2.4 分散分析表

source	SS	df	MS	EMS	F
A	$SS_A$	$df_A$	$\frac{SS_A}{df_A}$	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_{j=1}^A n_j \alpha_j^2}{A-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$
error	$SS_{error}$	$df_{error}$	$\frac{SS_{error}}{df_{error}}$	$\sigma_e^2$	
total	$SS_{total}$	$df_{total}$			

### 8.3 2元配置分散分析 (全ての $n_{jk}$ が等しい、バランスが取れている、直交している場合)

		要因 B (k)				
		水準 1	水準 2	水準 3	水準 B	
要因 A (j)	水準 1	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\mu_{13}$	$\mu_{1B}$	$\mu_{1.}$
	水準 2	$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	$\mu_{23}$	$\mu_{2B}$	$\mu_{2.}$
	水準 A	$\mu_{A1}$	$\mu_{A2}$	$\mu_{A3}$	$\mu_{AB}$	$\mu_{A.}$
		$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{.3}$	$\mu_{.B}$	$\mu$

#### 8.3.1 モデル

$$Y_{ijk} = \mu_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$= \mu + \alpha_j + \beta_k + \alpha\beta_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$$

ただし

$$\mu = \frac{1}{AB} \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \mu_{jk}$$

$$\alpha_j = \mu_{j.} - \mu$$

$$\beta_k = \mu_{.k} - \mu$$

$$\alpha\beta_{jk} = \mu_{jk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k) = \mu_{jk} - \mu_{j.} - \mu_{.k} + \mu$$

(交互作用は加算モデルからのズレを表している。)

### 8.3.2 検定仮説

$$H_{0A} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_A = 0 \quad (\mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{A.})$$

$$H_{0B} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_B = 0 \quad (\mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B})$$

$$H_{0AB} : \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \dots = \alpha\beta_{AB} = 0$$

### 8.3.3 データ、自由度、平方和の分解

$$Y_{ijk} - \mu = \mu_{jk} - \mu + Y_{ijk} - \mu_{jk}$$

$$= \mu_{j.} - \mu + \mu_{.k} - \mu + \mu_{jk} - \mu_{j.} - \mu_{.k} + \mu + Y_{ijk} - \mu_{jk}$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{...} + Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk}$$

$$= \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...} + \bar{Y}_{.k.} - \bar{Y}_{...} + \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{.k.} + \bar{Y}_{...} + Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk}$$

$$\sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \sum_{i=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = nB \sum_{j=1}^A (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 + nA \sum_{k=1}^B (\bar{Y}_{.k.} - \bar{Y}_{...})^2 +$$

$$n \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{.k.} + \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk})^2$$

$$SS_{total} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{error}$$

$$nAB - 1 = A - 1 + B - 1 + (A - 1)(B - 1) + AB(n - 1)$$

$$df_{total} = df_A + df_B + df_{AB} + df_{error}$$

### 8.3.4 分散分析表

source	SS	df	MS	EMS	F
A	$SS_A$	$df_A$	$\frac{SS_A}{df_A}$	$\sigma_e^2 + \frac{nB \sum_{j=1}^A \alpha_j^2}{A-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$
B	$SS_B$	$df_B$	$\frac{SS_B}{df_B}$	$\sigma_e^2 + \frac{nA \sum_{k=1}^B \beta_k^2}{B-1}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$
AB	$SS_{AB}$	$df_{AB}$	$\frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$	$\sigma_e^2 + \frac{n \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^B \alpha\beta_{ij}^2}{(A-1)(B-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_e}$
error	$SS_{error}$	$df_{error}$	$\frac{SS_{error}}{df_{error}}$	$\sigma_e^2$	
total	$SS_{total}$	$df_{total}$			