

# 正規分布 仮説検定

# 2017年度 心理・教育測定基礎編 A・B 心理・教育測定演習 A・B

心理・教育測定法(基礎編) A・B  
木曜日 7-8限:W607

担当 前川

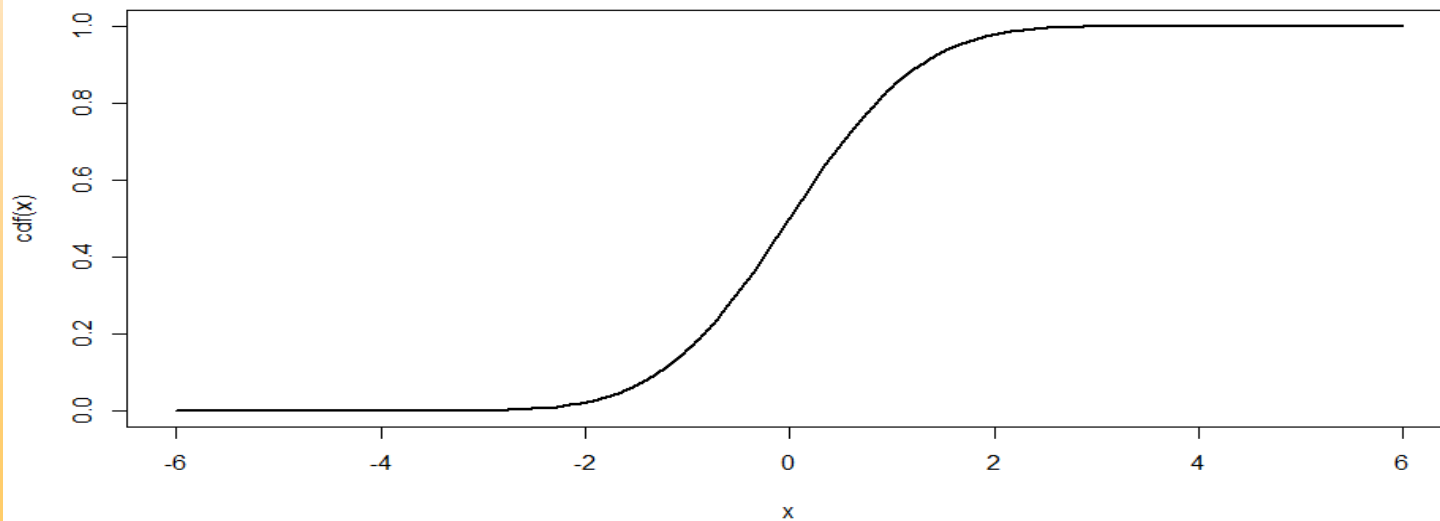
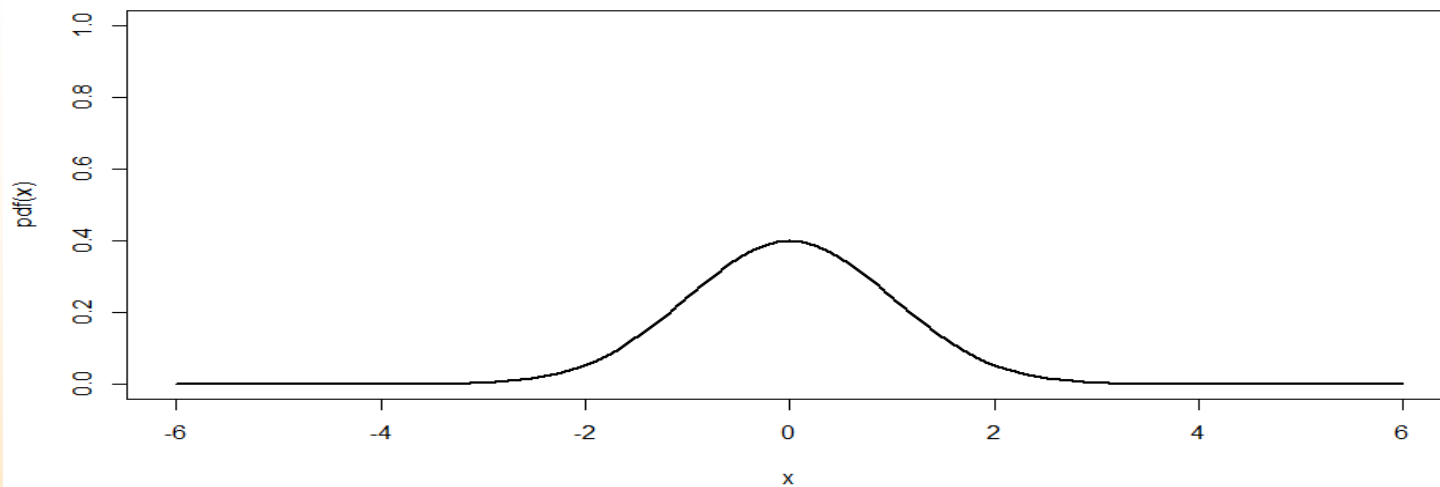
人間行動システム統計演習A・B  
木曜日 9-10限 W607

担当 前川  
栗山

4月 6日	オリエンテーション	前川	1	オリエンテーション	
4月13日	統計量の計算・相関と回帰		2	データフレームの操作	
4月20日	統計的推測の基礎		3	ヒストグラム、クロス集計	
4月27日	一つの母平均に関する推測		4	相関と回帰	
5月11日	二つの母平均に関する推測		5	平均値に関する推測	
5月18日	複数の母平均に関する推測		6	分散分析1	
5月25日	分散分析法と回帰分析		7	分散分析2	
6月 1日	まとめ		8	まとめ	
6月15日	イントロ		1	イントロ	
6月22日	多次元尺度法による個体の分類		2	多次元尺度法	
6月29日	クラスター分析による個体の分類		3	クラスター分析	栗山
7月 6日	回帰分析		4	回帰分析	
7月13日	因子分析		5	因子分析	
7月21日	共分散分析と構造方程式モデル	栗山	6	共分散分析と構造方程式モデル	栗山
7月27日	その他の方法		7	その他の方法	
8月 4日	まとめ		8	まとめ	

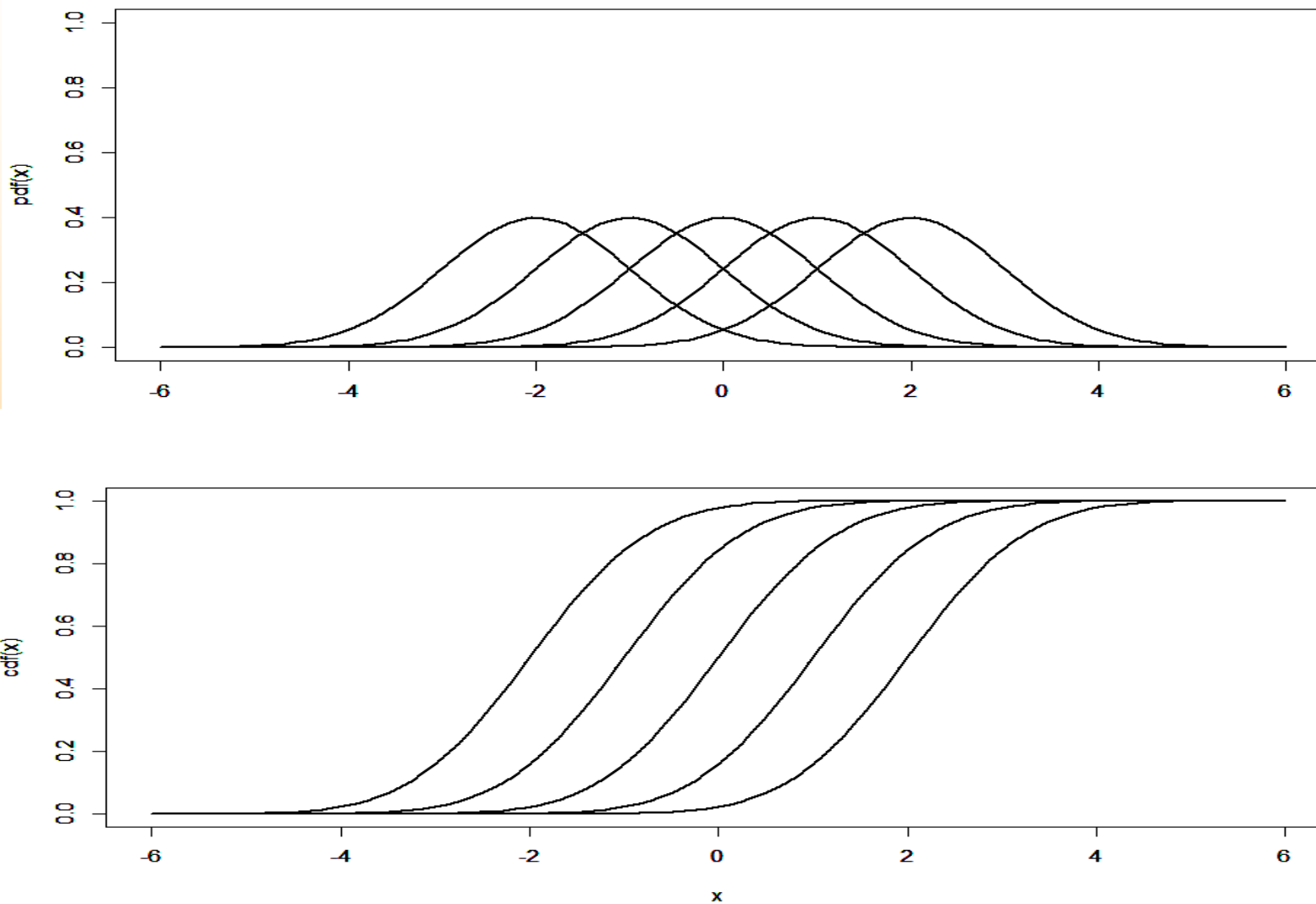
# 正規分布

標準正規分布  $N(0,1)$



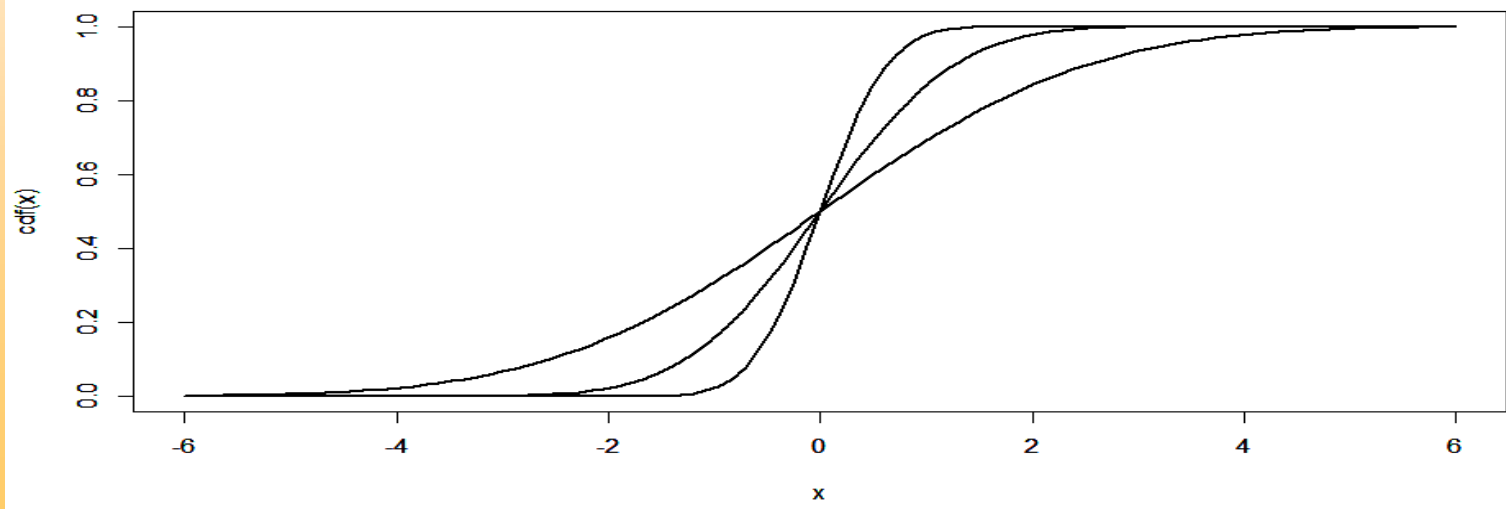
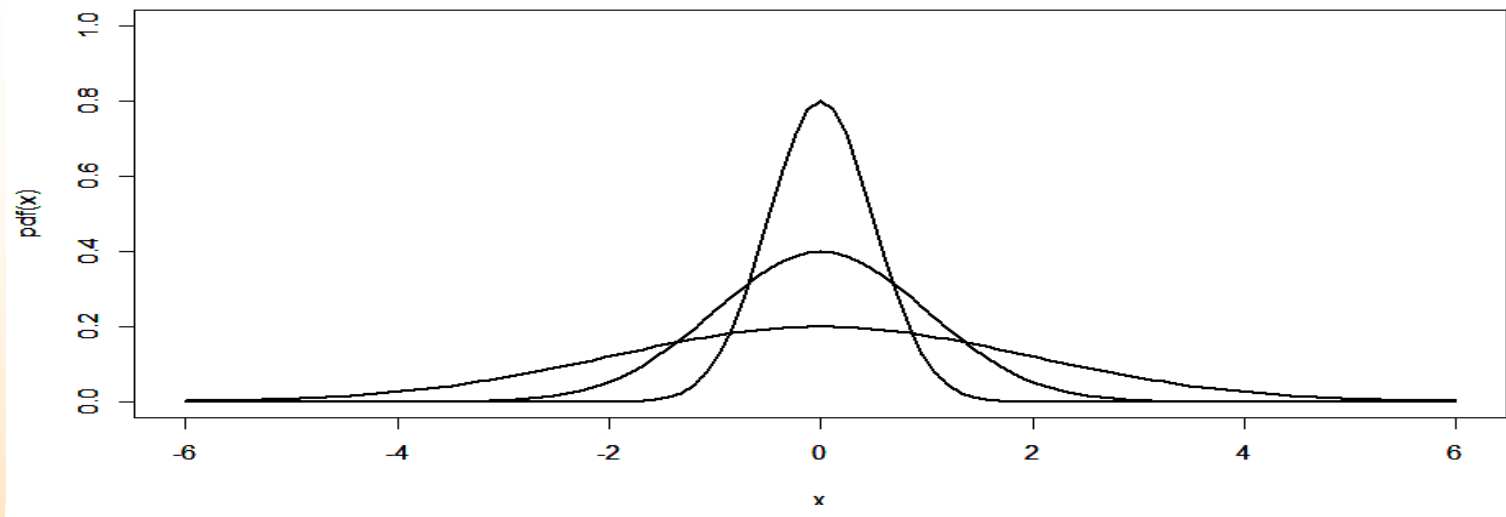
# 正規分布

母平均を変化させたもの  $\mu = -2, -1, 0, 1, 2, \sigma = 1$



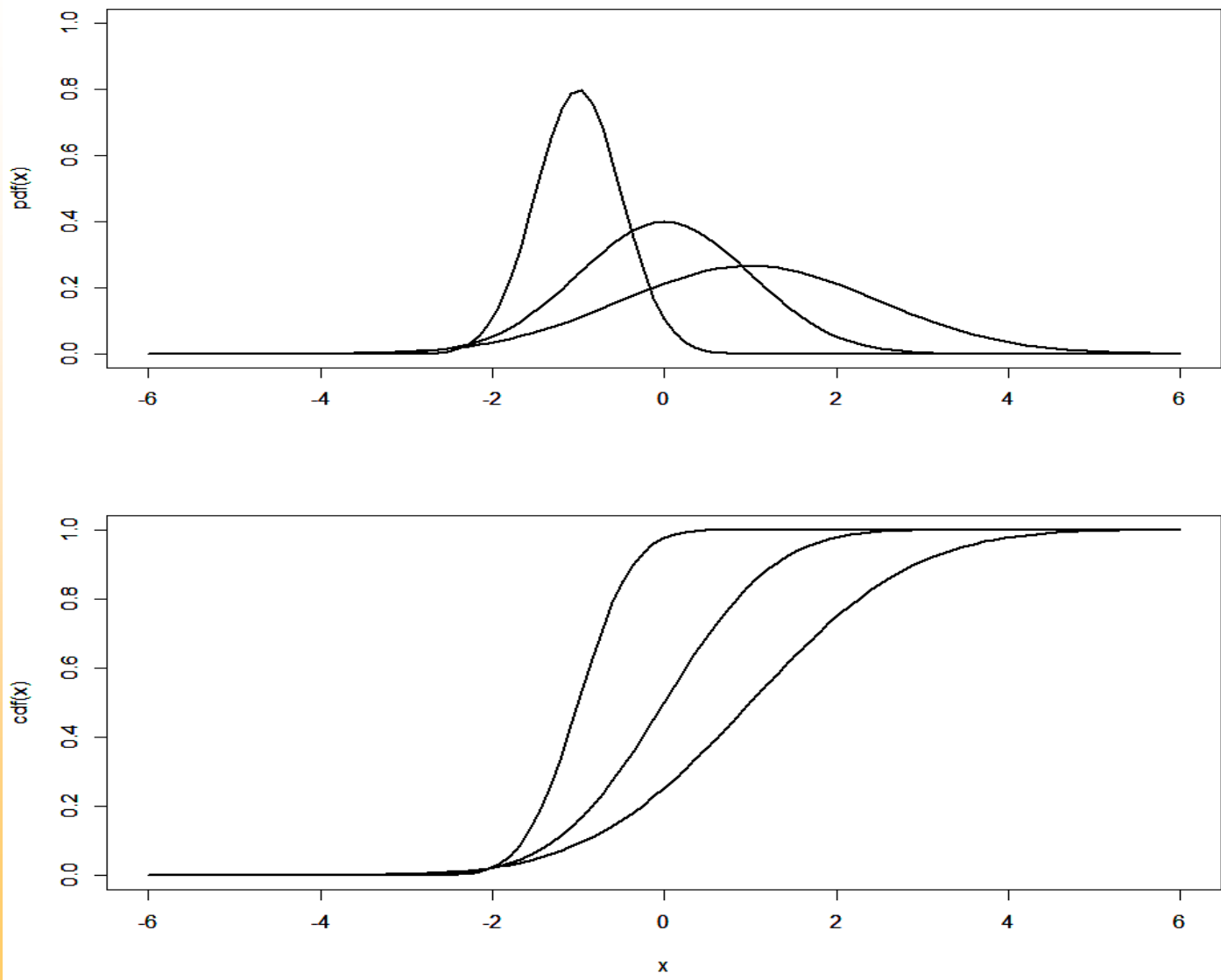
# 正規分布

母標準偏差を変化させたもの  $\mu = 0, \sigma = 0.5, 1, 2$



# 正規分布

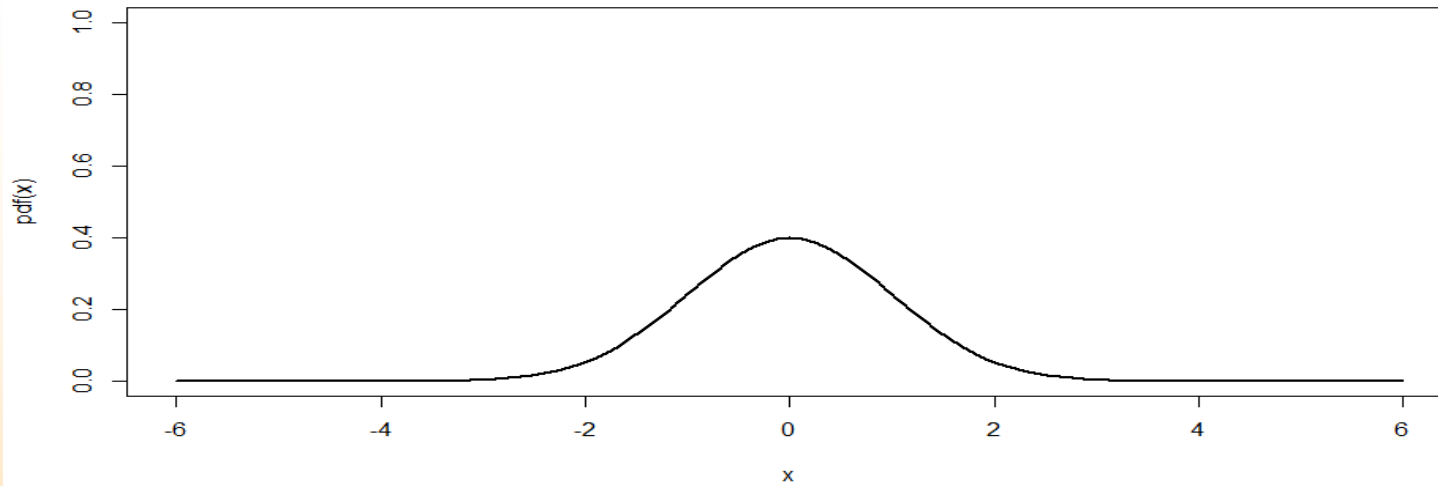
母平均、母標準偏差共に変化させたもの



# 正規分布

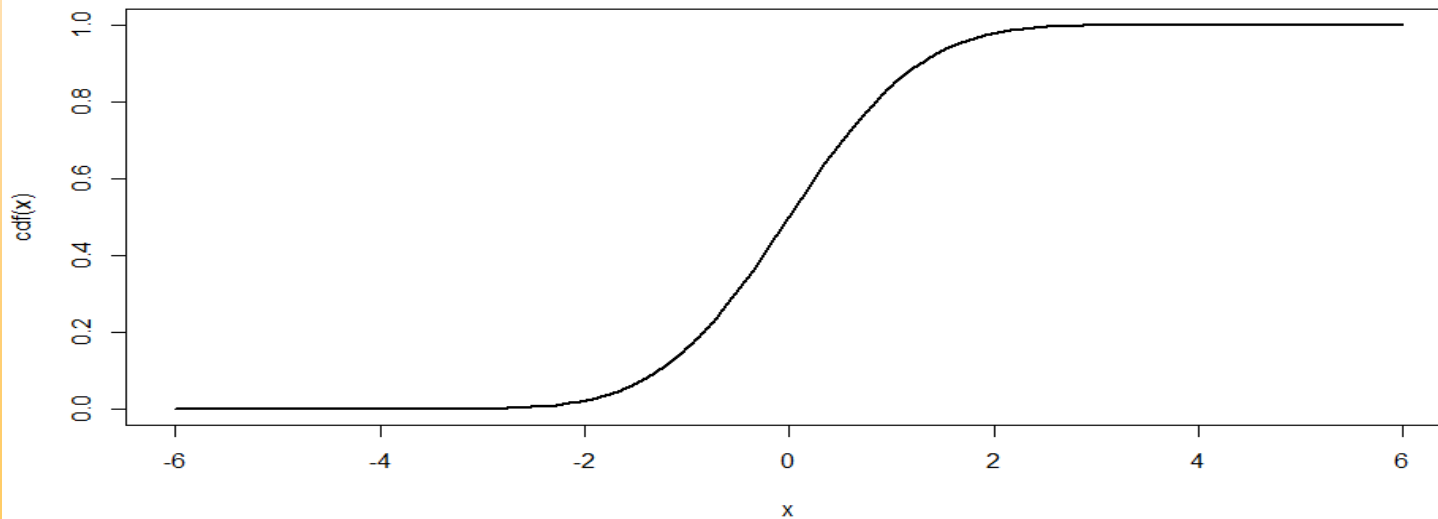
標準正規分布  $N(0,1)$

`dnorm(x,mean,sd)`



$\Phi$  `pnorm(x,mean,sd)`

$\Phi^{-1}$  `qnorm(x,mean,sd)`

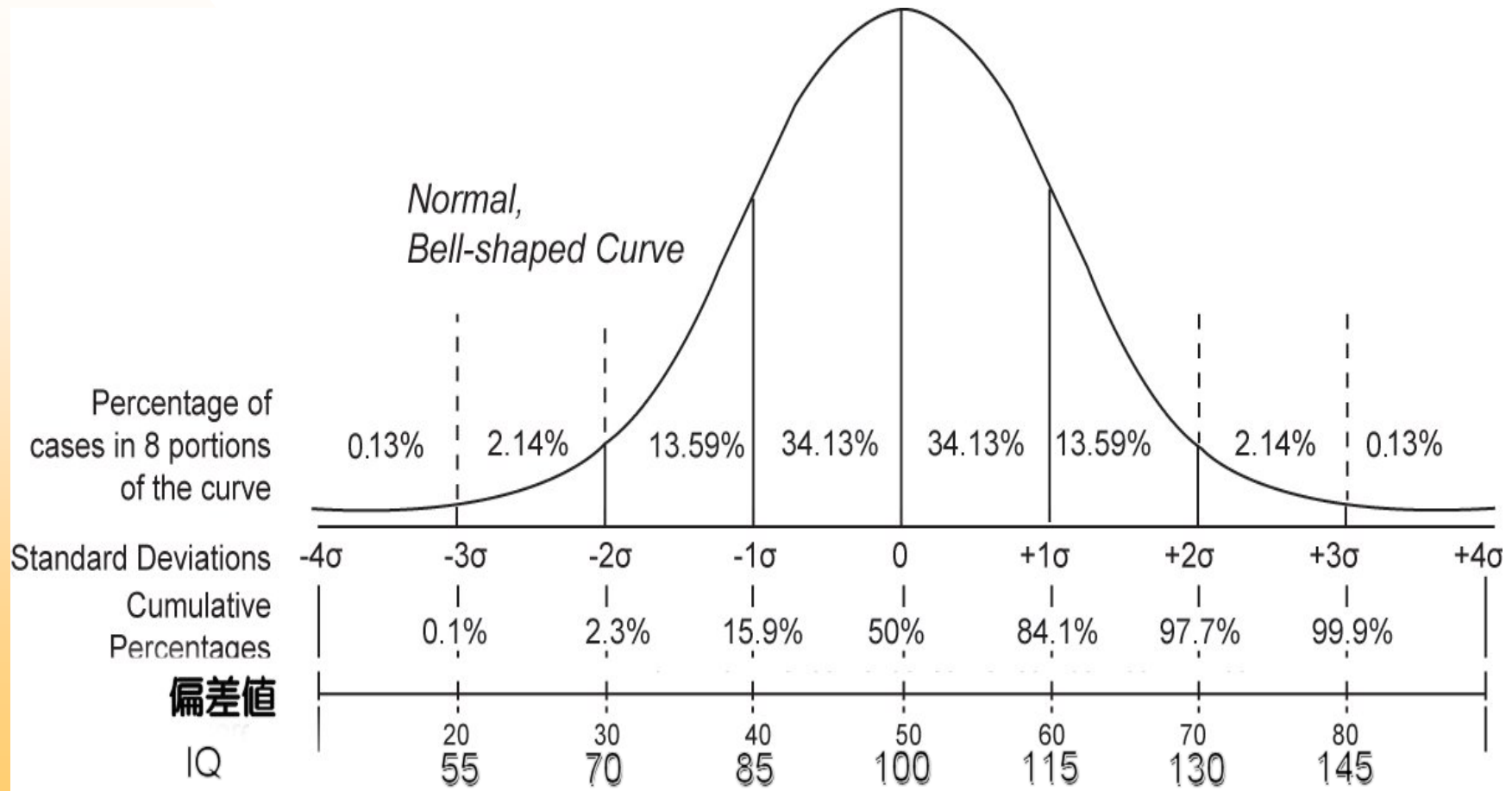


# 確率の計算：正規分布表

x	pdf:dnorm	$\Phi$ cdf:pnorm	$\Phi^{-1}$ p	invcdf:qnorm	分位点
-2.000	0.054	0.023			
-1.800	0.079	0.036			
-1.600	0.111	0.055	0.010	-2.3263479	
-1.400	0.150	0.081	0.025	-1.9599640	
-1.200	0.194	0.115	0.050	-1.6448536	
-1.000	0.242	0.159	0.100	-1.2815516	
-0.800	0.290	0.212	0.200	-0.8416212	
-0.600	0.333	0.274	0.300	-0.5244005	
-0.400	0.368	0.345	0.400	-0.2533471	
-0.200	0.391	0.421	0.500	0.0000000	
0.000	0.399	0.500	0.600	0.2533471	
0.200	0.391	0.579	0.700	0.5244005	
0.400	0.368	0.655	0.800	0.8416212	
0.600	0.333	0.726	0.900	1.2815516	
0.800	0.290	0.788	0.950	1.6448536	
1.000	0.242	0.841	0.975	1.9599640	
1.200	0.194	0.885	0.990	2.3263479	
1.400	0.150	0.919			
1.600	0.111	0.945			
1.800	0.079	0.964			
2.000	0.054	0.977			



# 確率の計算：正規分布表



# 確率の計算：正規分布表

正規分布をする確率変数を標準化したものは標準正規分布をする。すなわち、

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

の場合、

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

は

$$Z \sim N(0, 1)$$

である。このことを用いれば、

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq x) &= \Pr(X - \mu_X \leq x - \mu_X) = \Pr\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \end{aligned}$$

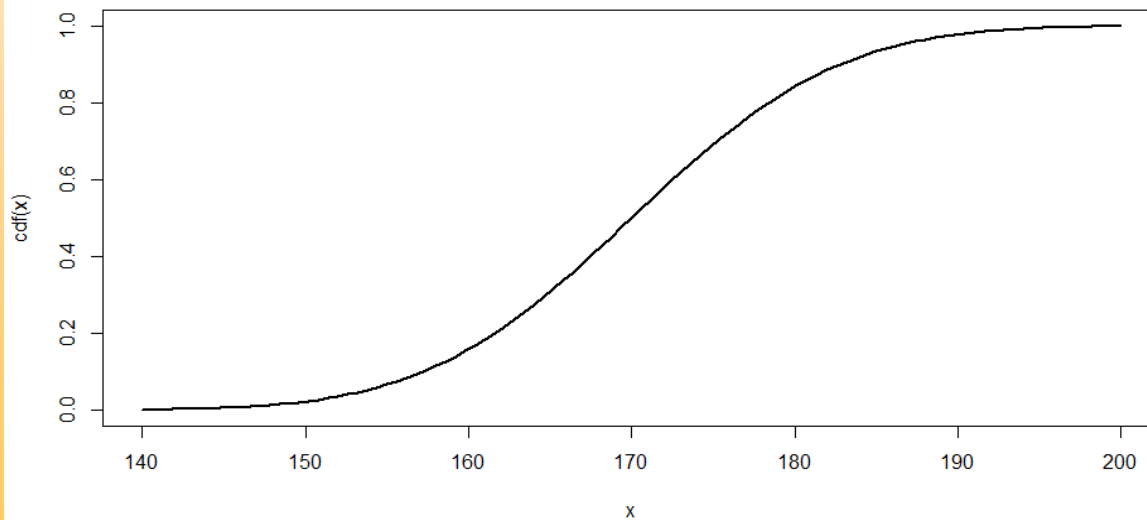
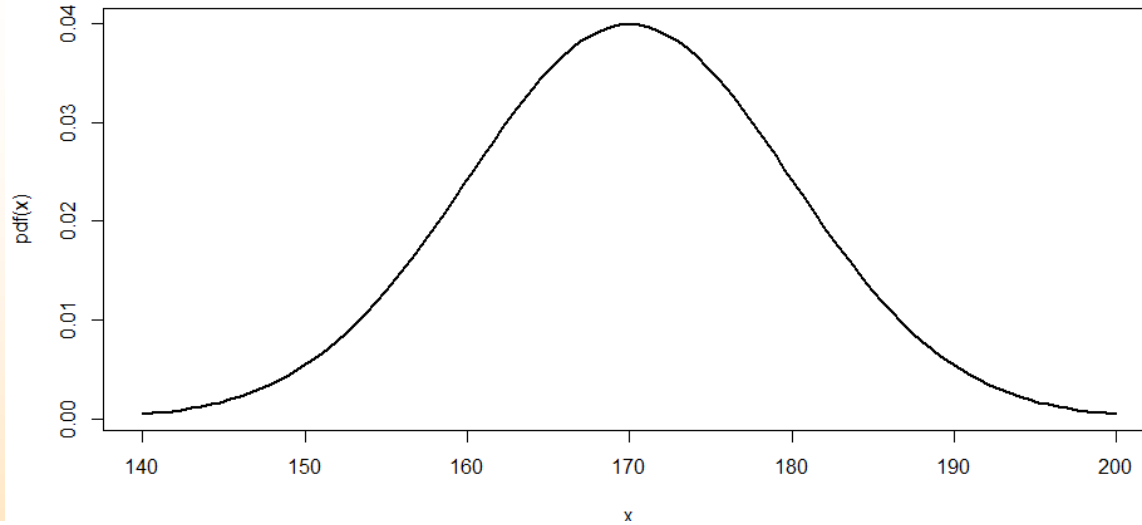
であるから、標準正規分布表を用いてこの確率を計算することが出来る。また、

$$\begin{aligned} \Pr(Z > z) &= 1 - \Pr(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) \\ \Phi(-z) &= 1 - \Phi(z) \quad \text{分布が対称だから} \end{aligned}$$

である。

# 身長 of データ

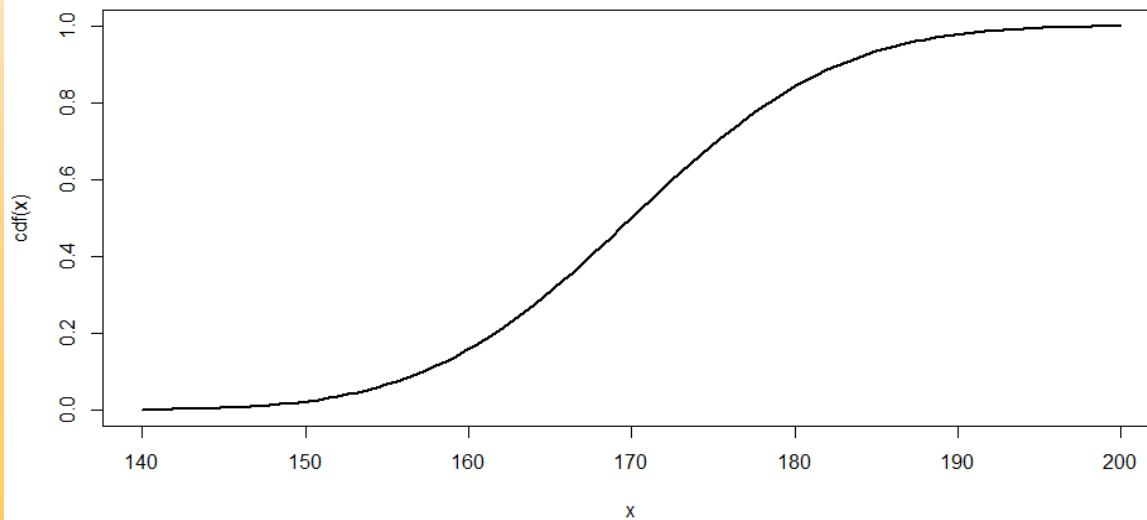
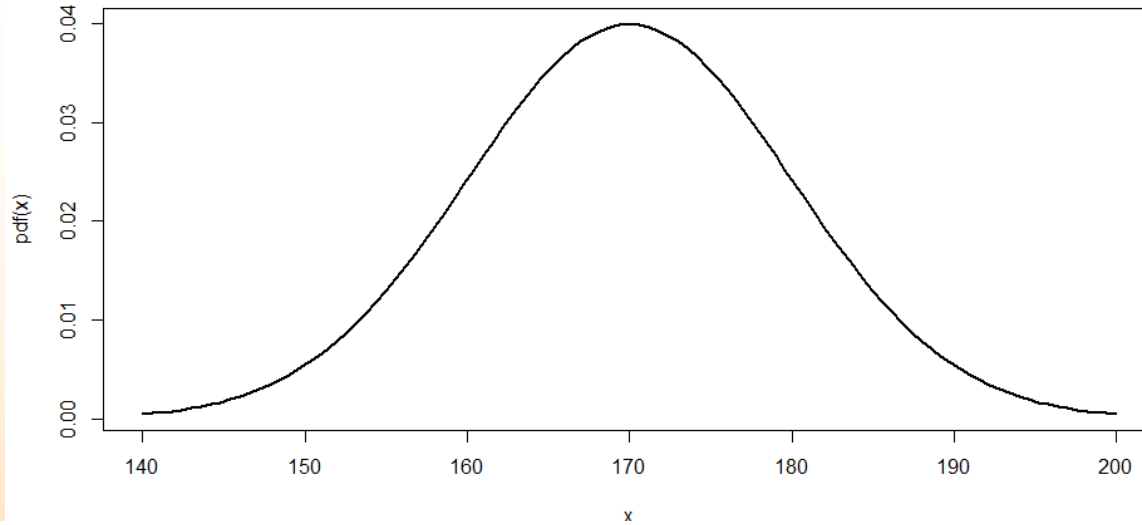
$\mu = 170, \sigma = 10$  とする。



x	pdf:dnorm	cdf:pnorm
150.000	0.005	0.023
152.500	0.009	0.040
155.000	0.013	0.067
157.500	0.018	0.106
160.000	0.024	0.159
162.500	0.030	0.227
165.000	0.035	0.309
167.500	0.039	0.401
170.000	0.040	0.500
172.500	0.039	0.599
175.000	0.035	0.691
177.500	0.030	0.773
180.000	0.024	0.841
182.500	0.018	0.894
185.000	0.013	0.933
187.500	0.009	0.960
190.000	0.005	0.977
192.500	0.003	0.988
195.000	0.002	0.994
197.500	0.001	0.997
200.000	0.000	0.999

# 身長 of データ

$\mu = 170, \sigma = 10$  とする。



p	invcdf:qnorm
0.010	146.737
0.025	150.400
0.050	153.551
0.100	157.184
0.200	161.584
0.300	164.756
0.400	167.467
0.500	170.000
0.600	172.533
0.700	175.244
0.800	178.416
0.900	182.816
0.950	186.449
0.975	189.600
0.990	193.263



# 命題の真偽

- 「A ならば B である。」が真である時
  - B ならば A である。
  - A でなければ B でない。
  - B でなければ A でない。

# 命題の真偽

- 「A ならば B でない。」が真である時
  - B でなければ A である。
  - A でなければ B である。
  - B であれば A でない。

- 「A ならば B である可能性は小である。」が真である時
  - B の可能性が小であれば A である。
  - A でなければ B の可能性は大である。
  - B の可能性が大であれば A でない。
- ◆ 可能性が小 → B を観測することは希。
- ◆ B を観測した時の A の真偽は？



- 「A ならば B である可能性は小である。」が真である時
  - B を観測できなければ A である。
  - A でなければ B を観測する。
  - B を観測すれば A でない。

# 命題の真偽

- 「 $H_0$  ならば B である可能性は小である。」

B は  $H_0$  が真の時に統計的に起こりにくいこと。

- B の可能性が小であれば  $H_0$  である。
  - $H_0$  でなければ B の可能性は大である。
  - B の可能性が大であれば  $H_0$  でない。
- ◆ 可能性が小 → B を観測することは希。
  - ◆ B を観測した時の A の真偽は？

## 4 統計的仮説検定の一般論

### 4.1 手続き

- 母集団の統計モデルを作る。  
正規分布、2項分布
- 検定仮説を立てる。  
 $H_0$  帰無仮説（何らかの制約が付いているもの）  
 $H_1$  制約を取ったものでふつうはこれを採択したい場合が多い。
- $H_0$  の下での検定統計量の分布を求める。  
標本平均、標本比率、平均平方和 その他  
正規分布、t 分布、F 分布 etc
- 棄却域を決める。  
 $H_0$  の下での検定統計量の分布で起こりそうもないこと（確率が小さいこと）を定義する。
- データを取る。  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$
- 観測された検定統計量が棄却域に入るかどうかを調べる。  
棄却域に入ったということは  $H_0$  の下で起こりそうもないことが起こったということなので  $H_0$  を棄却する。  
もしくは  $p$ -値を計算する。 $p$ -値とは、 $H_0$  が真の時に、検定統計量が、実際にデータから計算された検定統計量の値よりも極端な値をとる確率。



# 標本平均の分布

母集団において

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad iid$$

である場合、独立な  $n$  個の観測値の標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

の分布は

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

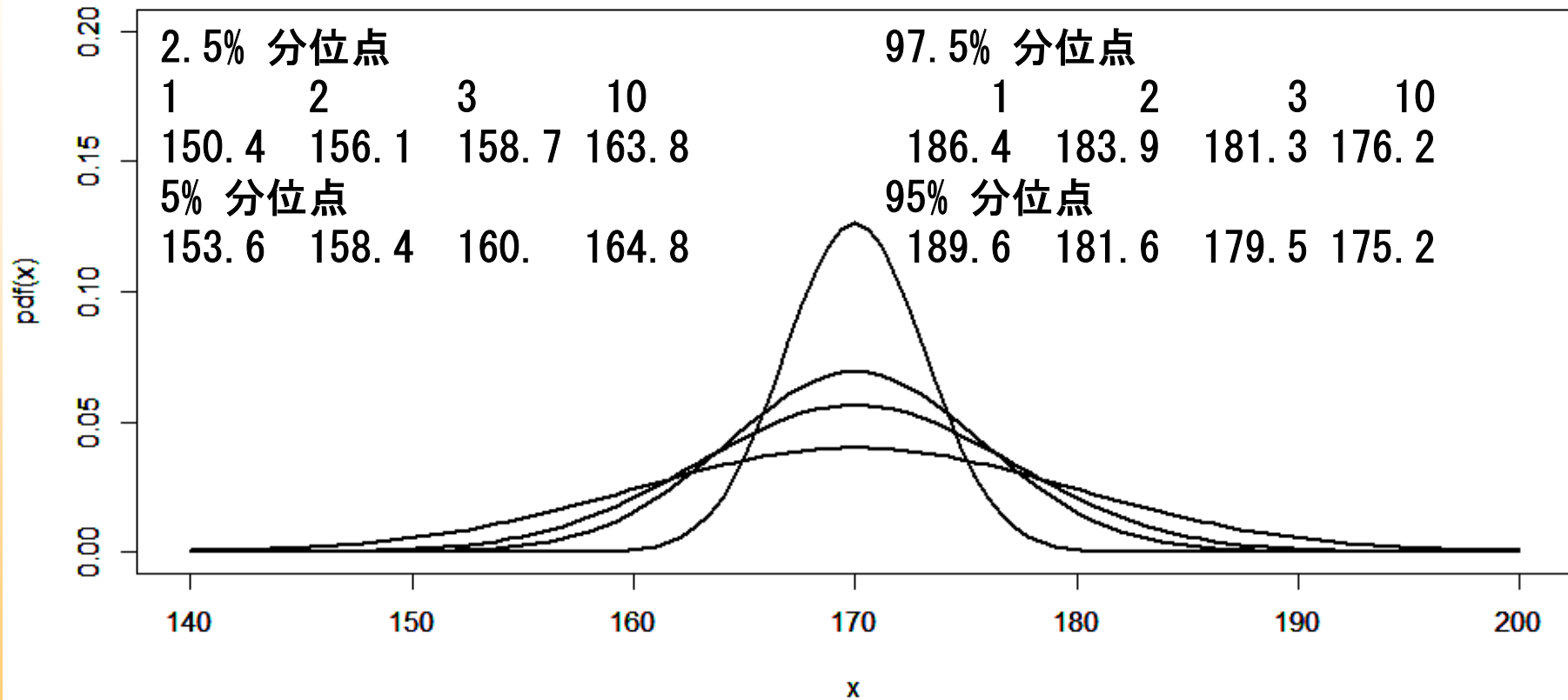
となる。

これは、母集団から、大きさ  $n$  の標本を採り、その平均を計算したものを  $\bar{X}_k$  とする、という作業を  $m$  回繰り返した時の  $\bar{X}_k, k = 1, 2, \dots, m$  の分布である。

# 標本平均の分布

$\mu = 170, \sigma = 10$  とする。

$n = 1, 2, 3, 10$



# 標本平均の分布

$\mu = 170, \sigma = 10$  とする。

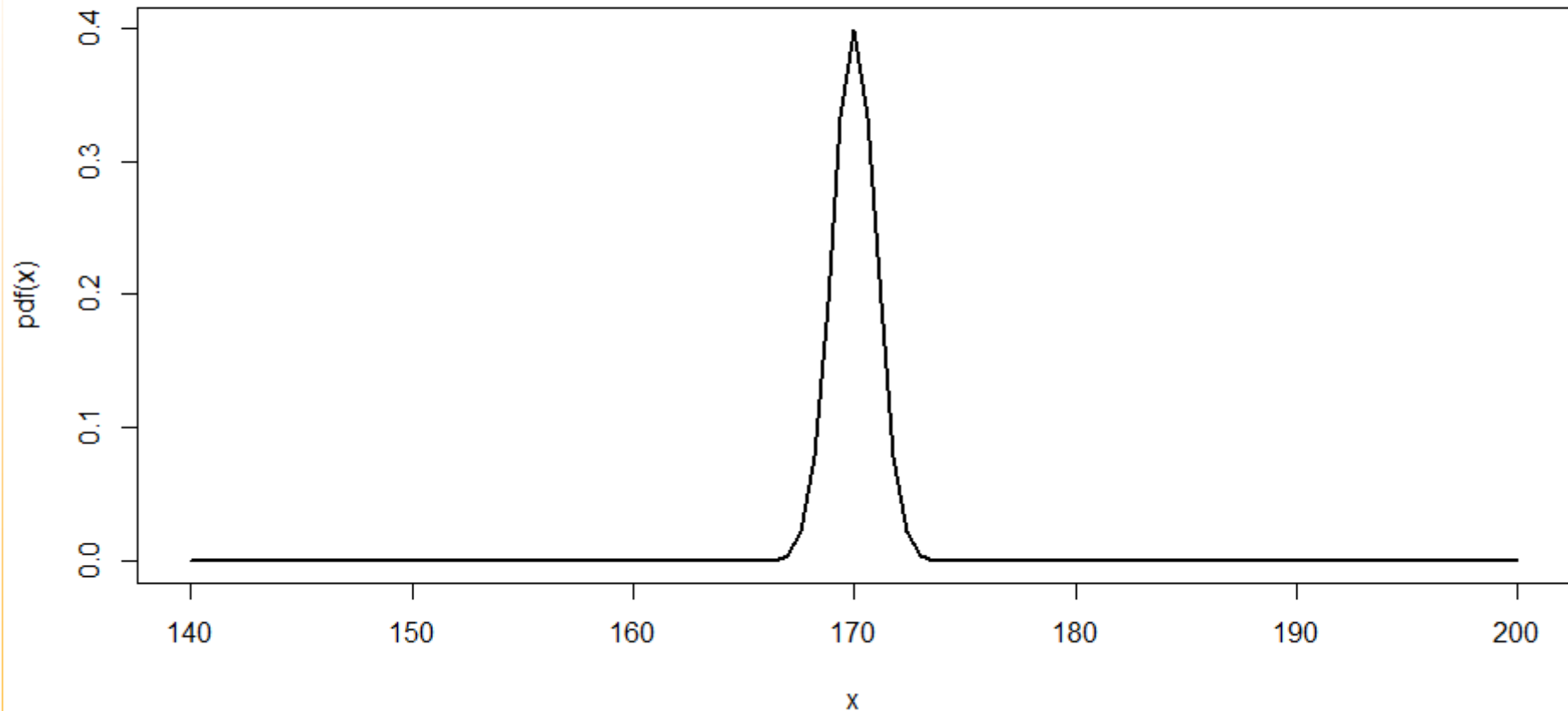
$n = 100$

97.5 % 分位点

1	2	3	10	100
186.4	183.9	181.3	176.2	172.0

95 % 分位点

189.6	181.6	179.5	175.2	171.6
-------	-------	-------	-------	-------



# 仮説検定

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 170$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

棄却域

$H_0$  が真の時に  $n$  個のデータから計算した標本平均が、  
低い確率  $\alpha$  で実現する範囲

97.5 % 分位点

1	2	3	10	100
186.4	183.9	181.3	176.2	172.0

95 % 分位点

189.6	181.6	179.5	175.2	171.6
-------	-------	-------	-------	-------

$\bar{x} = 176$  だとすると？



## ● 両側検定

### ■ 二つの領域の確率を足すと $\alpha$

2.5% 分位点

1	2	3	10	100
150.4	156.1	158.7	163.8	168.0

5% 分位点

153.6	158.4	160.	164.8	168.4
-------	-------	------	-------	-------

97.5% 分位点

1	2	3	10	100
186.4	183.9	181.3	176.2	172.0

95% 分位点

189.6	181.6	179.5	175.2	171.6
-------	-------	-------	-------	-------

$n = 10$  だと

$\alpha$

$$\Pr(\bar{X} \leq 163.8) + \Pr(176.2 \leq \bar{X}) = 0.05$$

$n = 100$  だと

$\bar{x} = 176$  だとすると？

$$\Pr(\bar{X} \leq 163.0) + \Pr(172.0 \leq \bar{X}) = 0.05$$

168.0

## ● 両側検定

### ■ 二つの領域の確率を足すと $\alpha$

2.5% 分位点

1	2	3	10	100
150.4	156.1	158.7	163.8	168.0

5% 分位点

153.6	158.4	160.	164.8	168.4
-------	-------	------	-------	-------

97.5% 分位点

1	2	3	10	100
186.4	183.9	181.3	176.2	172.0

95% 分位点

189.6	181.6	179.5	175.2	171.6
-------	-------	-------	-------	-------

$n = 10$  だと

$\alpha$

$$\Pr(\bar{X} \leq 164.8) + \Pr(175.2 \leq \bar{X}) = 0.1$$

$n = 100$  だと

$\bar{x} = 176$  だとすると?

$$\Pr(\bar{X} \leq 163.4) + \Pr(171.6 \leq \bar{X}) = 0.1$$

168.4

- 帰無仮説が真の時、観測された検定統計量の値を「越えた」ことが起こる確率。
- $p\text{-value} = \Pr(\text{検定統計量} > \text{観測値})$   
 $= \Pr(\text{検定統計量} < \text{観測値})$

$$\Pr(\bar{X} > \bar{x}) = \Phi(\bar{X} > \bar{x}) = \Pr\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$$

$$\Pr(\bar{X} < \bar{x}) = \Phi(\bar{X} < \bar{x}) = \Pr\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$$

$\bar{x} = 176$  だとすると?

$n=10$  ならば 0.029     $n=100$  ならば 0.0001 以下

## 4.2 検定統計量の選び方

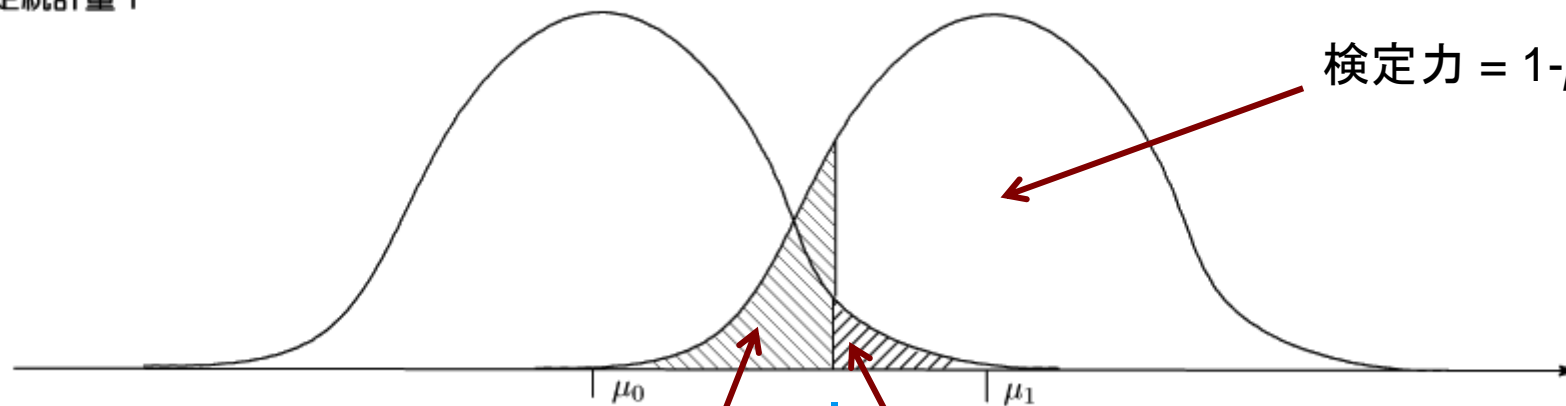
Table 1: 仮説検定に伴う誤り

		真の状態	
		$H_0$	$H_1$
採 択 さ れ た 仮 説	$H_0$	正解	第2種の誤り Type II Error $\beta$
	$H_1$	第1種の誤り Type I Error $\alpha$	正解

検定力とは  $H_1$  が正しい時にそれを正しく採択する確率のこと、すなわち  $1 - \beta$ 。

# 検定力

検定統計量 1



検定力 =  $1 - \beta$

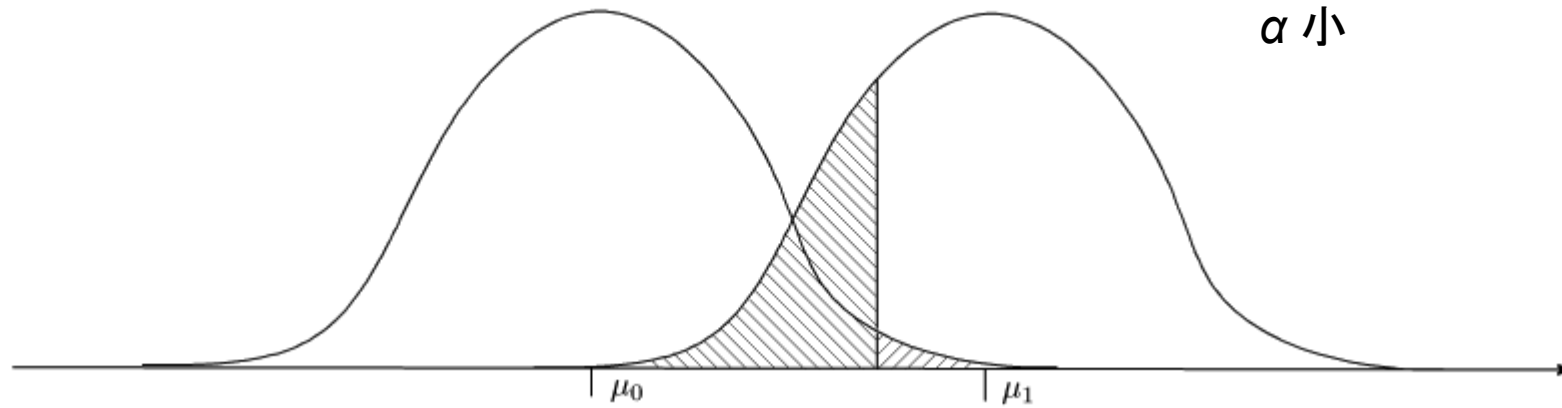
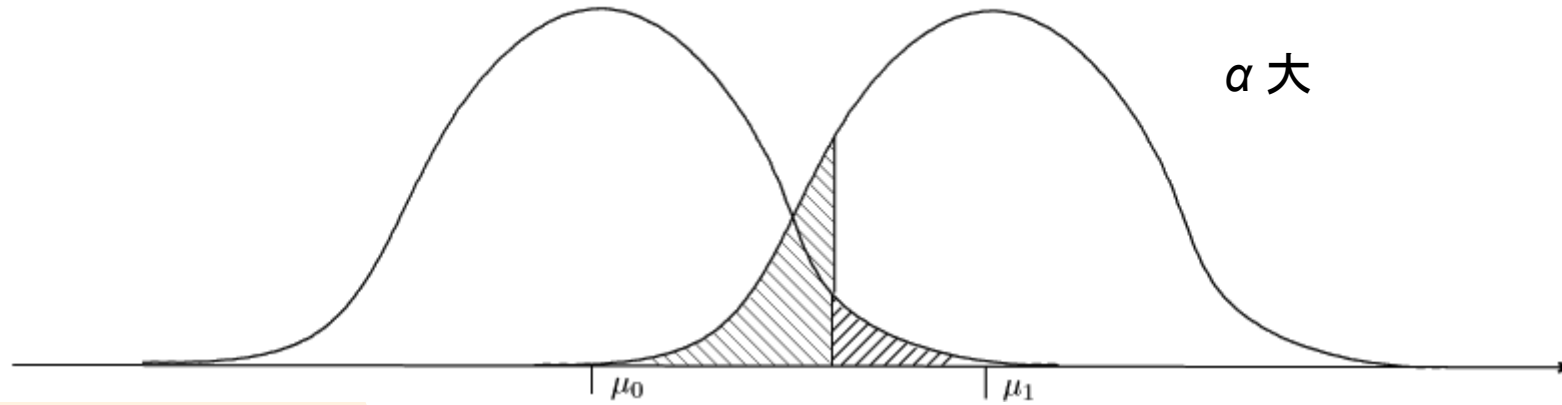
H0 を採択  
H1 を棄却

H0 を棄却  
H1 を採択

$\beta$  第2種の過誤  
 $\mu_0$  と  $\mu_0$  の差に依存

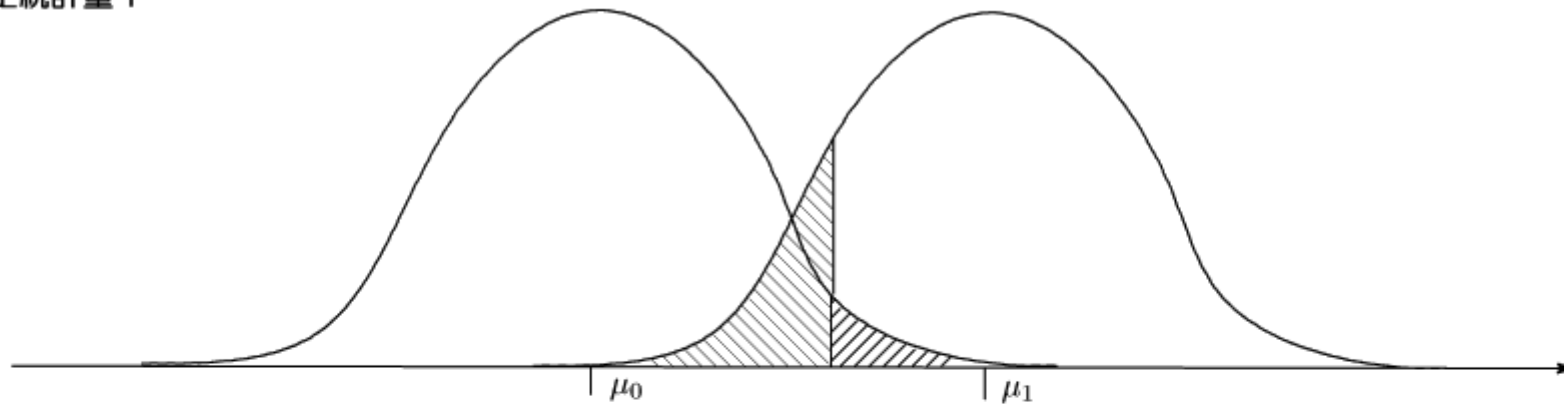
$\alpha$  第1種の過誤  
有意水準  
H0 の時に小さい様にする。

# 検定力 $\alpha$ を減らす



# 検定力 $n$ を増やす

検定統計量 1



検定統計量 2

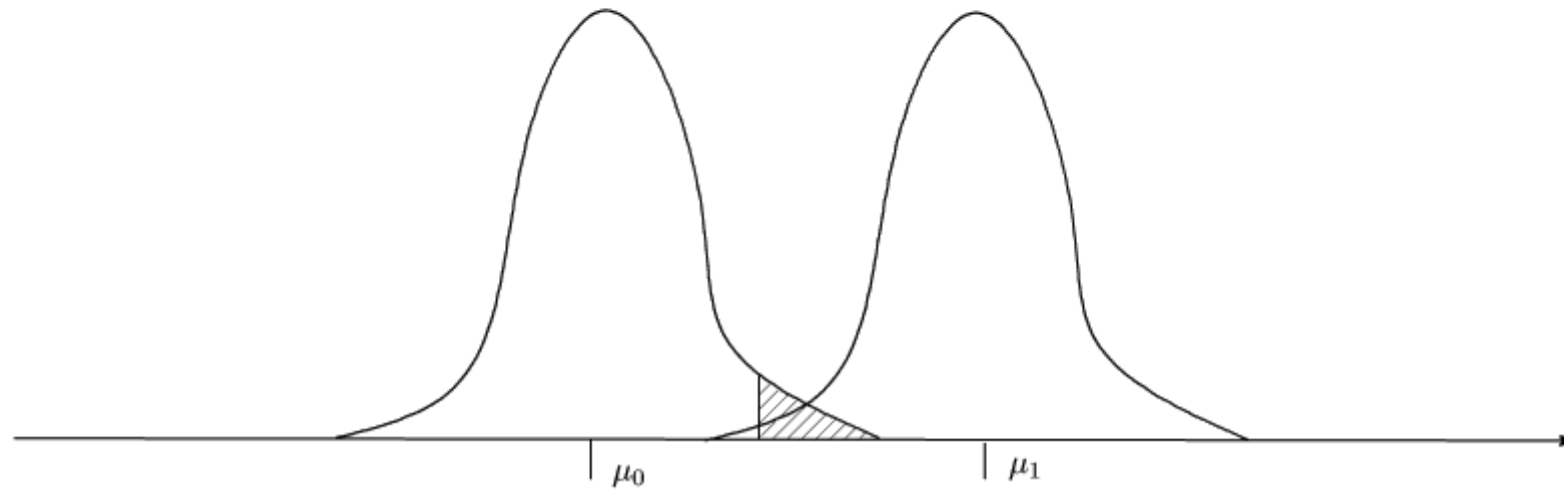


Figure 1: Power Comparison