

人間行動システム統計演習

第5回：平均値に関する推測 担当：中川、寺井、和嶋*

2015年5月14日

はじめに、ten_fs_c.csvをOCWiからコピーして実習用フォルダの中に保存し、データセットten_fs_cとして読み込んで下さい。ten_fs_c.csvは、国語、算数、理科、社会、英語の1学期(f)と2学期(s)の成績と所属している組(class)からなるデータです。classを数値変数からカテゴリ変数(因子)に変換して下さい(「データ」「アクティブデータセット内の変数の管理」「数値変数を因子に変換」)。

1 1つの母集団の母数に関する仮説検定

あるデータの母平均 μ が、指定した値 μ_0 と同じであるといえるかを検定するための方法は、以下のようになります。

両側検定

帰無仮説 H_0 : 「 $\mu = \mu_0$ (母平均は μ_0 である)」

対立仮説 H_1 : 「 $\mu \neq \mu_0$ (母平均は μ_0 ではない)」

片側検定

帰無仮説 H_0 : 「 $\mu = \mu_0$ (母平均は μ_0 である)」

対立仮説 H_1 : 「 $\mu \geq (\leq) \mu_0$ (母平均は μ_0 より小さい(大きい))」

母平均、サンプル数、標本平均、標本標準偏差を、それぞれ μ_0, n, \bar{X}, s とする時、検定統計量 t_0 は次のように求められます。

$$t_0 = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

t_0 は、自由度が $n-1$ の t 分布に従う値です($t_0 \sim t(n-1)$)。この t_0 の値の確率を計算し、その確率が十分に低ければ(1%または5%より低ければ)、帰無仮説を棄却します。

「統計量」「平均」「1標本t検定」をクリックし、対象となる変数を1つ選択します。対立仮説として、両側検定または片側検定($\mu > \mu_0$ または $\mu < \mu_0$)を選択し、帰無仮説の $\mu_0 =$ 欄に検定したい値を入力します。信頼水準として.95が規定値として入力されています。必要に応じて

* 御質問などは寺井 (asuka@nm.hum.titech.ac.jp) にメールにてご連絡下さい。

変更してください。例えば、国語の前期平均点が 50 点であるかどうかを、両側検定してみてください。

```
One Sample t-test

data:  ten_fs_c$Kokugo_f
t = 16.4577, df = 53, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 50
95 percent confidence interval:
 63.69227 67.49291
sample estimates:
mean of x
 65.59259
```

t 値, 自由度 (df:t 検定における自由度は $n - 1$ です。) p 値 (p-value) 表示されます。p-value < 2.2e-16 と出力されていることから、母平均は 50 点 ($= \mu_0$) であるという帰無仮説が棄却され「国語の前期平均点は 50 点と 1% 水準で有意な差がある」といえます。その下に、95 percent confidence interval として 95% 信頼区間が表示されています。信頼水準をいくつにするかによって推定される信頼区間が代わります。一番下には、入力したデータの平均値が表示されています。

2 片側検定

仮説が方向性を持っている場合は片側検定を用います。「国語の前期平均点は 50 点より高い」という対立仮説を検定する場合、「対立仮説」オプションにおいて「母平均 $\mu > \mu_0$ 」にチェックを入れます。一方、「国語の前期平均点は 50 点より低い」という対立仮説を検定する場合、「対立仮説」オプションにおいて「母平均 $\mu < \mu_0$ 」にチェックを入れます。

国語の前期の平均点が 50 点か否かの片側検定

```
One Sample t-test  # 対立仮説：国語の前期の平均点は 50 点より高い

data:  ten_fs_c$Kokugo_f
t = 16.4577, df = 53, p-value = 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is less than 50
95 percent confidence interval:
 64.00647 Inf
sample estimates:
```

```

mean of x
65.59259

One Sample t-test # 対立仮説：国語の前期の平均点は 50 点より低い

data: ten_fs_c$Kokugo_f
t = 16.4577, df = 53, p-value = 1
alternative hypothesis: true mean is greater than 50
95 percent confidence interval:
 -Inf      67.1781
sample estimates:
mean of x
65.59259

```

対立仮説が「国語の前期平均点は 50 点より高い」の場合は、 $p\text{-value} < 2.2\text{e-}16$ となっており、帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択します。すなわち、「国語の前期平均点は 1% 水準で 50 点より高い」と言えます。標本の平均点が 50 点よりも大きいので当然ですが、対立仮説が「国語の前期平均点は 50 点より低い」の場合は、 $p\text{-value} = 1$ となり、帰無仮説が採択されます。

3 等分散性の検定

2 つのデータの母分散が等しいかどうかを検定は、F 検定によって行われます。手順は以下のようになります。

帰無仮説 H_0 : 「2 群の母分散は等しい ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)」

対立仮説 H_1 : 「2 群の母分散は等しくない ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)」

不偏分散の大きい群を a 群, 小さい方を b 群としたとき、各ケース数を n_a, n_b , 不偏分散を U_a, U_b とします。検定統計量 F_0 は

$$F_0 = \frac{U_a}{U_b}$$

となります。 F_0 は、第 1 自由度が $n_a - 1$, 第 2 自由度が $n_b - 1$ の F 分布に従います。

等分散性の検定は「統計量」「分散」「分散の比の F 検定」で実行できますが、データの形式が前期と後期各々について、1 組と 2 組の算数の得点の母分散が等しいかどうかを検定してみます。

```
F test to compare two variances
```

```

data: Sansu_f by class
F = 1.2002, num df = 31, denom df = 21, p-value = 0.672
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5217221 2.5944201
sample estimates:
ratio of variances
      1.200162

      F test to compare two variances

data: Sansu_s by class
F = 6.2697, num df = 31, denom df = 21, p-value = 4.926e-05
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 2.725485 13.553294
sample estimates:
ratio of variances
      6.269667

```

F 値, 自由度 (num df, denom df) p 値 (p-value) 95% 信頼区間が表示されます。前期については、p-value = 0.672 と出力されていることから、2 群の母分散は等しいという帰無仮説は棄却されません。一方後期は、p-value = 4.926e-05 と出力されていることから、2 群の母分散は等しいという帰無仮説を有意水準 1% で棄却します。

4 対応のない 2 つの標本の平均値の差の検定

2 つの標本の平均値に差があるかどうかを検定するときには、t 検定を行います。ただし、2 つの標本の分散が等しいかどうかで、検定統計量 t_0 の計算方法が異なってきます。

帰無仮説 H_0 : 「2 群の母平均値に差はない」

対立仮説 H_1 : 「2 群の母平均値に差がある」

分散が等しい場合の検定統計量 t_0

2 つの母集団の母分散が等しい ($\sigma_a = \sigma_b$) と仮定できる場合。

a 群, b 群のケース数を n_a, n_b , 平均値を \bar{X}_a, \bar{X}_b , 不偏分散を U_a, U_b とします。

$$t_0 = \frac{|\bar{X}_a - \bar{X}_b|}{\sqrt{U_e \left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} \right)}}$$

$$U_e = \frac{(n_a - 1) U_a + (n_b - 1) U_b}{n_a + n_b - 2}$$

この t_0 は自由度が $n_a + n_b - 2$ の t 分布に従います。

分散が異なる場合 (Welch の方法) t_0

2 つの母集団の母分散が等しい ($\sigma_a = \sigma_b$) と仮定できない場合。

a 群, b 群のケース数を n_a, n_b , 平均値を \bar{X}_a, \bar{X}_b , 不偏分散を U_a, U_b とする。

$$t_0 = \frac{|\bar{X}_a - \bar{X}_b|}{\sqrt{\frac{U_a}{n_a} + \frac{U_b}{n_b}}}$$

t_0 は以下の式で計算される自由度 ν での t 分布に従います。

$$\nu = \frac{\left(\frac{U_a}{n_a} + \frac{U_b}{n_b} \right)^2}{\frac{U_a^2}{n_a^2 (n_a - 1)} + \frac{U_b^2}{n_b^2 (n_b - 1)}}$$

前期後期それぞれについて、1 組と 2 組の算数の得点の母平均に差があるかどうかを検定してみます。「統計量」「平均」「独立サンプル t 検定」をクリックします。分析の対象となる変数を選択するとともに、オプションタブにて両側または片側検定、信頼水準、等分散に関して設定を行って下さい。前期の算数の得点は、「1 組と 2 組の母分散は等しい」という帰無仮説が棄却されなかったため、「1 組と 2 組の母分散は等しい」と仮定できます。そのため、「等分散と考えますか？」に対し「Yes」を選択してください。一方後期は「1 組と 2 組の母分散は等しい」という帰無仮説が棄却されたため、「1 組と 2 組の母分散は等しい」と仮定できません。従って、「等分散と考えますか？」に対し「No」を選択してください。

Two Sample t-test

data: Sansu_f by class

t = -1.7059, df = 52, p-value = 0.094

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

```
-9.4471710  0.7653528
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
58.75000  63.09091
```

```
Welch Two Sample t-test
```

```
data: Sansu_s by class
```

```
t = -5.5264, df = 43.589, p-value = 1.712e-06
```

```
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
-14.023845 -6.527292
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
64.40625  74.68182
```

t 値, 自由度 (df) p 値 (p-value) 95% 信頼区間が表示されます。一番下には、入力したデータの平均値が表示されています。前期については、p-value = 0.094 と出力されていることから、2 群の平均は等しいという帰無仮説は棄却されません。そのため、前期の 1 組と 2 組の算数の得点の平均には有意な差があるとはいえません。一方後期は、p-value = 1.712e-06 と出力されていることから、2 群の平均は等しいという帰無仮説を有意水準 1% で棄却します。従って、後期の 1 組と 2 組の算数の得点の平均には 1% 水準で有意な差があるといえます。

5 対応のある 2 つの標本の平均値の差の検定

データに対応がある場合も `t.test()` で検定を行うことができます。

帰無仮説 H_0 : 「母平均値に差はない」

対立仮説 H_1 : 「母平均値に差がある」

n ケースの、対応のある 2 変数を X_i, Y_i , 両者の差を $d_i = X_i - Y_i$ とする ($i=1, 2, \dots, n$) 時、検定統計量 t_0 は次のように求められます。

$$t_0 = \frac{|\bar{d}|}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}}$$

t_0 は、自由度が $n-1$ の t 分布に従う値となります。

国語の前期と後期の平均点の差を検定してみましょう。「統計量」「平均」「対応のある t 検定」をクリックして下さい。対象となる 2 変数を選択するとともに、オプションタブにて対立仮説、信頼水準を設定してください。

国語の前期と後期の平均点の差の検定

```
Paired t-test

data:  ten_fs_c$Kokugo_f and ten_fs_c$Kokugo_s
t = 3.6902, df = 53, p-value = 0.0005297
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 4.818225 16.292886
sample estimates:
mean of the differences
      10.55556
```

t 値, 自由度 (df), p 値 (p-value), 95% 信頼区間が表示されます。p-value = 0.0005297 と出力されていることから、「母平均値に差はない」という帰無仮説は 1% 水準で棄却されます。従って、国語の前期と後期の平均点には 1% 水準で有意な差があると言えます。

演習

国語の前期と後期の点数の差を表す変数 (Kokugo_dif) を新たに作成し(「データ」「アクティブデータセット内の変数の管理」「新しい変数を計算」)、国語の前期と後期の点数の差の平均が 0 であるか否かの検定を行い、国語の前期と後期の平均点の差に関する対応のある平均値の差の検定結果と同じ結果となることを確認してください。

6 正規性が仮定されない場合

上記で紹介した分析は、「標本が正規母集団から得られたものである (正規性)」ことが仮定されています。正規性が仮定できるか否かは、正規性の検定を行い確認することができます。

帰無仮説 H_0 : 「母集団は正規分布に従う」

対立仮説 H_1 : 「母集団は正規分布に従わない」

正規性の検定には、Kolmogorov-Smirnov 検定がよく用いられます。R では `ks.test` 関数を用いて検定することができます。正規性の検定については、R コマンドでは実装されていないため、

スクリプトウィンドにて以下のコマンドを実行してください。

```
> ks.test(ten_fs_c$Kokugo_f, "pnorm",  
+ mean=mean(ten_fs_c$Kokugo_f),  
+ sd=sd(ten_fs_c$Kokugo_f))
```

以下のような結果が出力されます。

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test  
  
data: ten_fs_c$Kokugo_f  
D = 0.1641, p-value = 0.109  
alternative hypothesis: two-sided
```

上記結果では、`p_value = 0.109` となっており、帰無仮説が採択されます。そのため、「正規性が仮定できる」と判断できます。

正規性が仮定されない場合は、Wilcoxon 検定 (`wilcox.test` 関数) を用いてください。

- 対応のないデータ: 「統計量」 「ノンパラメトリック検定」 「2 標本ウィルコクソン検定」
- 対応のあるデータ: 「統計量」 「ノンパラメトリック検定」 「対応のあるウィルコクソン検定」

7 本日の課題

以下の検定を行って下さい (正規性を仮定して検定を行って下さい。正規性の検定を行う必要はありません。)

1. iris データ (「データ」 「パッケージ内のデータ」 「アタッチされたパッケージからデータセットを読み込む」をクリックし、「パッケージ」: `dataset`, 「データセット」: `iris` を選択) を読み込み、「花弁の長さ (Petal.Length) が 3cm より長い」といえるか否かを検定する。
2. がく片の長さ (Sepal.Length) と花弁の長さ (Petal.Length) の長さに差があるといえるか否かを検定する。
3. `setosa` 種と `virginica` 種 (Species: 品種) について花弁の長さ (Petal.Length) に差があるといえるか否かを検定する (ヒント: R コマンダーのみを用いて分析を行う場合、`setosa` 種と `virginica` 種に関するデータのみを持つ新しいデータセットを作成する必要があります)。

作成したスクリプトファイルを OCWi から提出してください。課題の締め切りは 5 月 27 日 23:59:59 までとします。